Produits de séries de Fourier (d'après Lifeng Li)

Hervé Le Ferrand *

2002

1 Position du problème

Je reprends les termes de L. Li (?). On se place sur **P** ensemble des continues par morceaux, régulières par morceaux, bornées, périodiques de période 2π. On considère deux fonctions de **P**, f et g : leur produit $h = fg$ est encore dans P. Si on a $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(inx)$, on associe à f la matrice de Toeplitz infinie $T(f)$ dont le coefficient (n, m) vaut f_{n-m}. Alors, d'après (??), on a :

$$h_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{n-m} g_m \text{ règle de Laurent} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \exp(inx) \qquad (2) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{n-m} g_m \exp(inx) \qquad (3) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(\lim_{M\to+\infty} \sum_{m=-M}^{M} f_{n-m} g_m \right) \exp(inx) \qquad (4) \end{aligned}$$

Le problème de Li se situe au niveau du passage aux calculs sur ordinateurs, moment auquel il faudra effectuer des troncatures. Ce qui revient à considérer :

$$h_n^{(M)} = \sum_{m=-M}^{M} f_{n-m} g_m = \sum_{m=-M}^{M} (T(f))_{n-m}\, g_m \tag{5}$$

$$h^{(M)}(x) = \sum_{m=-M}^{M} h_n^{(M)} \exp(inx) \tag{6}$$

On pose aussi :

$$h_M(x) = \sum_{m=-M}^{M} h_n \exp(inx). \tag{7}$$

*Université de Bourgogne, courriel : leferran@satie.u-bourgogne.fr

La question est la suivante : quelle est la validité de cette troncature ? C'est à dire, a-t-on

$$\lim_{M \to +\infty} h^{(M)}(x) = h(x) \ ? \tag{8}$$

au moins simplement. Concernant les matrices de Toeplitz, on sera aussi amené à les tronquer de façon symétrique, entre $-M$ et M : on notera $T^{(M)}(f)$ la matrice tronquée. Ainsi, on peut écrire :

$$h_n^{(M)} = \sum_{m=-M}^{M} f_{n-m} g_m = \sum_{m=-M}^{M} \left(T^{(M)}(f)\right)_{n-m} g_m \tag{9}$$

2 Les résultats de L. Li

Toute la difficulté vient des points de dicontinuité que peuvent avoir f et g en commun. Donnons de manière abrégée les résultats obtenus par Li.

1. Si f et g n'ont pas de point de discontinuité en commun, la réponse à la question (8) est oui. On a même de la convergence uniforme vers 0 sur l'axe réel de $h^{(M)} - h_M$.

2. Si f et g ont des points de discontinuité en commun, la réponse à la question (8) est non.

3. **C'est la le point le plus intéressant** : si f et g ont des discontinuités en commun et si en ces points $h = fg$ est continue (les discontinuité se neutralisent), si f ne s'annulle pas, moyennant des hypothèses du type partie réelle de $\frac{1}{f}$ garde un signe constant, la réponse à la question (8) est oui **mais** avec

$$h_n^{(M)} = \sum_{m=-M}^{M} \left(\left(T^{(M)}(\frac{1}{f})\right)^{-1}\right)_{n-m} g_m \tag{10}$$

   On a tronqué la matrice de Toeplitz $T(\frac{1}{f})$, puis inverser cette matrice tronquée (qui n'est plus nécessairement de Toeplitz).

References

[1] Lifeng Li, Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures, J. Opt. Soc. Am. A, vol 13,n. 9, p. 1870-1876, 1996

[2] Lifeng Li, Mathematical reflections on the fourier modal method in grating theory, in Mathematical Modeling in Optical Sciences, Frontiers Appl. Maths 22, SIAM, 2001