Analyse Numérique / Numerical Analysis

Systèmes linéaires hyperboliques d'équations aux dérivées partielles : régularité L^2_{loc} et faisceaux de matrices diagonalisables.

Jérôme Laurens[1] Hervé Le Ferrand [2]
"Analyse Appliquée - Optimisation", Département de Mathématiques
Université de Bourgogne, 9 Avenue Alain Savary, BP 47870, 21078 Dijon cedex FRANCE

Résumé.- La régularité des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques, est liée aux propriétés spectrales d'un faisceaux de matrices réelles. Nous nous intéressons ici à la régularité L^2. Celle ci est obtenue si et seulement si l'exponentielle imaginaire du faisceau est bornée. Nous regardons le lien entre cette condition et les propriétés spectrales du faisceau, ici diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Nous donnons en particulier un critére d'exponentielle bornée si les valeurs propres ne sont pas de multiplicités constantes, et nous montrons que dans le cas des faisceaux engendrés par deux matrices 3×3, l'exponentielle est bornée si et seulement si le faisceau est analytiquement diagonalisable.

Hyperbolic linear systems : Cauchy problem properly posed in L^2 and pencils of diagonable matrices on $\mathbb{R}$.

Abstract.- The well-posedness of a Cauchy problem issue from an hyperbolic linear system is linked to the spectral properties of a real matrix pencil. It is known that such a problem is well-posed in L^2 if and only if the imaginary exponential of the pencil is bounded. We give a condition to have a bounded exponential when the eigenvalues have not the same multiplicities. For pencils spanned by two 3×3 matrices, we prove that the exponential is bounded if and only if the pencil is analytically diagonable.

1. Introduction. – Dans [6] Lax donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants conduise à un problème aux conditions initiales de Cauchy $(\mathcal{PC})$ bien posé au sens des distributions (avec existence, unicité, et dépendance continue par rapport aux données initiales de la solution) : toutes les matrices du faisceau réel $\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \left\{\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta} = \sum_{j=1}^{p} A_j\,\zeta_j,\ \boldsymbol{\zeta} = (\zeta_j) \in \mathbb{R}^p\right\}$ ne doivent posséder que des valeurs propres réelles.

$$\begin{cases} \partial_t\,\mathbf{w} + \displaystyle\sum_{j=1}^{p} A_j\,\partial_j \mathbf{w} = 0, & \mathbf{w}(t, x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{A} = (A_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^p. \\ \mathbf{w}(t=0, .) = \mathbf{w}^0(.), & \mathbf{w}^0(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (\mathcal{PC})$$

Mais d'un point de vue numérique ou simplement calculatoire, il est préférable de travailler avec des solutions qui sont des fonctions plutôt que des distributions, c'est pourquoi on étudie la régularité des solutions de $(\mathcal{PC})$. Tout d'abord, pour que ce problème de Cauchy soit bien posé dans l'espace $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^p)^n$ où est choisie la condition initiale $\mathbf{w}^0$, il est nécessaire que toutes les matrices du faisceau réel $\mathbf{f}(\mathbf{A})$ soient diagonalisables dans $\mathbb{R}$ (se référer au cas $p = 1$), on dira que le faisceau est *simplement diagonalisable dans* $\mathbb{R}$. Par ailleurs, l'analyse de Fourier montre que le problème de Cauchy $(\mathcal{PC})$ est bien posé dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^p)^n$ (ou $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^p)^n$, ce qui est équivalent) si et seulement si $\boldsymbol{\zeta} \mapsto \exp(i\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta})$ est une fonction bornée, on dira que *l'exponentielle imaginaire du faisceau* $\mathbf{f}(\mathbf{A})$ *est bornée.* Mais cette condition suffisante est difficilement vérifiable en pratique, c'est ainsi que notre travail concerne la recherche d'une condition nécessaire et suffisante de régularité, portant directement sur le faisceau $\mathbf{f}(\mathbf{A})$. Par exemple, il s'agit de savoir si la diagonalisabilité simple dans $\mathbb{R}$ d'un faisceau réel est suffisante pour que son exponentielle imaginaire soit bornée.

Un aspect simplifié du problème concerne les *faisceaux de rang* 2 engendrés par deux matrices indépendantes. Il est possible de diagonaliser de tels faisceaux par des matrices de passages analytiques

[1] mel : jerome.laurens@satie.u-bourgogne.fr
[2] mel : herve.leferrand@satie.u-bourgogne.fr

en chaque ζ_j ($j = 1, 2$) sauf peut-être en des points isolés. Il est alors clair que l'exponentielle est bornée si il existe un changement de base analytique en ζ_j sur tout $\mathbb{R}$ qui diagonalise le faisceau, on dira qu'il est *analytiquement diagonalisable dans* $\mathbb{R}$. Notons que se restreindre à $\mathbb{R}$ donne sa difficulté à cette étude puisque les faisceaux complexes simplement diagonalisables sur $\mathbb{C}$ ont été caractérisés complètement par Motzkin et Taussky (pour $p = 2$ mais on généralise sans peine à p quelconque) dans [8] et [9] (voir aussi [7] p. 85) : un tel faisceau complexe est engendré par des matrices qui commutent.

Dans la partie suivante, on revoit des cas particuliers de faisceaux diagonalisables à exponentielle bornée qui donnent autant de conditions suffisantes plus pratiques pour que le problème ($\mathcal{PC}$) soit bien posé dans L^2_{loc}. Il s'agit presque à chaque fois de montrer que le conditionnement du faisceau est uniformément borné. La troisième partie précise des situations où le conditionnement peut ne pas être borné, via l'analyse complexe et les faisceaux analytiques. Dans la quatrième partie, nous faisons une étude exhaustive des faisceaux de dimension 2 de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ simplement diagonalisables dans $\mathbb{R}$, pour lesquels l'eponentielle est bornée si et seulement si le faisceau est analytiquement diagonalisable.

2. Études de cas. –

2.1. *La matrice des vecteurs propres a un conditionnement uniformément borné* – La diagonalisation de $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\zeta}$ à l'aide d'une matrice de vecteurs propres unitaires $P(\boldsymbol{\zeta})$ donne $\exp(i\,\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\zeta}) = P(\boldsymbol{\zeta})\ \text{diag}(\exp(i\,\lambda_l(\boldsymbol{\zeta})))\,P(\boldsymbol{\zeta})^{-1}$. Ainsi, l'exponentielle imaginaire du faisceau est bornée si le conditionnement $\|P(\boldsymbol{\zeta})\|\,\|P(\boldsymbol{\zeta})^{-1}\|$ est majoré et les deux exemples suivants remplissent cette condition.

2.2. *Les matrices sont simultanément symétrisables* – Si le changement de base Q rend les matrices A_j simultanément symétriques, alors la matrice des vecteurs propres est de la forme $P(\boldsymbol{\zeta}) = Q\,R(\boldsymbol{\zeta})$ où R est orthogonale. Le conditionnement de $P(\boldsymbol{\zeta})$ est donc majoré par celui de Q à une constante de normalisation près. En particulier, des matrices diagonalisables qui commutent deux-à-deux sont simultanément symétrisables, elles engendrent un faisceau dont l'exponentielle imaginaire est bornée. De plus, l'étude exhaustive de [2] montre qu'un faisceau réel de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si et seulement si les matrices sont simultanément symétrisables.

2.3. *Les valeurs propres sont de multiplicités constantes* – On trouve dans [7] et [12] les arguments pour diagonaliser $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\zeta}$ à l'aide des matrices de vecteurs propres $P(\boldsymbol{\zeta})$ et $P(\boldsymbol{\zeta})^{-1}$ continues et bornées, au moins localement. Comme $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\zeta}$ est homogène de degré 1 en $\boldsymbol{\zeta}$, elle peut aussi être diagonalisée par $P(\boldsymbol{\zeta}/|\boldsymbol{\zeta}|)$ et $P(\boldsymbol{\zeta}/|\boldsymbol{\zeta}|)^{-1}$. Un recouvrement fini de la sphère unité permet de définir des changements de bases globalement bornés, éventuellement non continus, mais le conditionnement est bien borné.

2.4. *Transfert d'opérateur.* – Dans [5], on montre par des arguments fonctionnels que le problème ($\mathcal{PC}$') suivant, avec des matrices d'ordre n A'_j symétriques et une matrice E symétrique définie positive, est bien posé dans $L^2_{(\text{loc})}(\mathbb{R}^d)^n$.

$$\begin{cases} E\ \partial_t\,\mathbf{w} + \displaystyle\sum_{j=1}^{p} A'_j\,\partial_j\mathbf{w} = 0 \quad (\Longleftrightarrow\ \partial_t\,\mathbf{w} + \displaystyle\sum_{j=1}^{p} E^{-1}A'_j\,\partial_j\mathbf{w} = 0) \\ \mathbf{w}(t=0,.) = \mathbf{w}^0(.). \end{cases} \qquad (\mathcal{PC}')$$

Ainsi, le problème ($\mathcal{PC}$) sera bien posé dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)^n$ s'il existe une matrice symétrique définie positive E telle que $E\,A_j (= A'_j)$ est symétrique pour tout j.

3. Utilisation du caractère analytique. –

3.1. *Les valeurs propres sont analytiques.* – Limitons nous à $p = 2$ en considérant les matrices de la forme $A_1 + tA_2$ où t est un complexe. Les valeurs propres de $A_1 + tA_2$ sont analytiques et de multiplicités constantes sauf en un ensemble de points isolés du plan complexe. On suppose que pour tout t réel, $A_1 + tA_2$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Ainsi les valeurs propres $\lambda_l(t)$ sont analytiques en tout point de la droite réelle ([10], [3]) et la résolution classique du système $\big(A_1 + tA_2 - \lambda_l(t)\big)X = 0$ donne une matrice $P(t)$

de vecteurs propres analytiques et indépendants sauf en des points isolés. Sous certaines conditions ([1], [4], [11])), la diagonalisation peut se faire, localement, de façon analytique. Remarquons qu'en général, $P(t)^{-1}$ présente des pôles et le conditionnement n'est pas borné.

3.2. *Des endomorphimes induits sont strictement diagonalisables.* – Pour montrer que l'exponentielle imaginaire du faisceau réel $\mathbf{f}(\mathbf{A})$ est bornée, on étudie une matrice $P(\boldsymbol{\zeta})$ de vecteurs propres normalisés. Pour des valeurs propres de multiplicités constantes, $P(\boldsymbol{\zeta})$ a un conditionnement borné et une exponentielle imaginaire bornée, cela se produit encore dans la situation plus générale suivante.

Si $\lambda(\boldsymbol{\zeta})$ est une valeur propre de $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta}$, soit $\pi_{\lambda(\zeta)}$ la projection caractéristique sur $\ker\big(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta}-\lambda(\boldsymbol{\zeta})\big)$ parallèlement aux autres espaces propres. Si le faisceau admet des valeurs propres analytiques dans toutes les directions, alors pour tous $\boldsymbol{\zeta}$ et $\boldsymbol{\zeta}'$, les endomorphismes induits par $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta}'$ dans les espaces propres de $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta}$ notés $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta}'_{|\zeta}=\pi_{\lambda(\zeta)}\ \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta}'\ \pi_{\lambda(\zeta)}$ ont des valeurs propres réelles. Plus généralement,

Lemme 1 *Soit A diagonalisable et B matrice carrée de même ordre. Si $\lambda(t)$ est une valeur propre de $A+t\,B$ dont le développement limité de Puiseux est de la forme $\lambda+t^\alpha\,\mu+o(t^\alpha)$, où $0<\alpha\le 1$, alors $\alpha=1$ et μ est valeur propre de l'endomorphisme induit par B dans* $\ker(A-\lambda\,Id)$ *ou bien $\alpha<1$ et $\mu=0$.*

La preuve repose sur la forme du premier terme d'un développement limité de $\det\big(t\,N-(\mu\,t^\alpha+o(t^\alpha))Id\big)$ ou $\det\big(t^{1-\alpha}\,N-(\mu+o(1))Id\big)$ pour une matrice nilpotente non nulle N.

Si tous les endomorphismes induits par les $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta}'$ dans les espaces propres de $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta}$ sont strictement diagonalisables, on dira que les valeurs propres sont séparées à l'ordre 1 en $\boldsymbol{\zeta}$, ce qui permet d'énoncer :

Proposition 1 *Si les valeurs propres d'un faisceau réel simplement diagonalisable dans $\mathbb{R}$ sont séparées à l'ordre* 1 *en tout point de discontinuité de la multiplicité des valeurs propres, alors son exponentielle imaginaire est borné.*

On montre directement que le conditionnement est borné.

4. Étude systématique des faisceaux simplement diagonalisables de $\mathbb{R}^{3\times 3}$. –

4.1. *Démarche et réduction des cas* – On détermine pour commencer les faisceaux de deux matrices $\mathbf{f}(A,B)$ simplement diagonalisables qui possèdent des singularités dans la multiplicité de leurs valeurs propres, sans pour autant remplir les critères déjà mentionnés lors de l'étude des cas précédents. Des transformations permettent de réduire ces faisceaux à des formes plus simples, sachant que $\mathbf{f}(A,B)$, son transposé, $\mathbf{f}(x\,A,y\,B)$, $\mathbf{f}(A-x\,Id,B-y\,Id)$, $\mathbf{f}(A,B-x\,A)$ pour x et y réels et $\mathbf{f}(P\,A\,P^{-1},P\,B\,P^{-1})$ pour P inversible, sont en même temps simplement diagonalisables ou bien ont en même temps une exponentielle imaginaire bornée.

Avec cela, les faisceaux intéressants restent ceux pour lesquels une matrice a une valeur propre simple et deux doubles alors qu'une autre en a trois simples, ce sont les valeurs respectives de A et B qui après les transformations élémentaires précédentes deviennent

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\d&e&0\end{pmatrix}\tag{1}$$

La première restriction sur B est $a\,c\,d=0$ qui est nécessaire pour que les valeurs propres de $A+t\,B$ soient des fonctions analytiques de t au voisinage de 0 (on a $\det(A+t\,B-(1+\lambda\,t^2+O(t^3))\,Id)=a\,c\,d\,t^3+O(t^4)$). Deux cas exclusifs sont à envisager : $a=0$ et $a\neq 0$ avec $d=0$ (c et d jouent un rôle symétrique comme le montre la permutation des deux premiers vecteurs de base).

4.2. *Cas $a=0$* – Parmi les composantes restantes de B, l'une n'est pas nulle pour que B ne le soit pas, et quitte à permuter deux vecteurs de base et transposer, on peut supposer que c'est e. Dans ce cas,

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{d}{e}&1&0\\0&0&e\end{pmatrix},\quad Q^{-1}A\,Q=A,\quad Q^{-1}B\,Q=\begin{pmatrix}0&0&b\,e\\0&0&d\,b+c\,e\\0&1&0\end{pmatrix}$$

permet de réduire à $d = 0$, $e = 1$. Les matrices du faisceau sont alors diagonalisables à valeurs propres réelles si et seulement si $c > 0$, puis $c = 1$ par le changement de base $\mathrm{diag}(1, \sqrt{c}, 1)$. On obtient un faisceau générique d'exponentielle imaginaire bornée engendré par les matrices simultanément symétrisables :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R} \tag{2}$$

4.3. *cas $a \neq 0$ avec $d = 0$.* – Le polynôme caractéristique de B étant $X\left(X^2 - c\,e\right)$, les trois valeurs propres de B sont réelles si et seulement si $c\,e \geq 0$, B est en plus diagonalisable et non nulle si et seulement si $c\,e > 0$. Le changement de base $\mathrm{diag}(e/a, \sqrt{e/a}, 1)$ permet de réduire à la deuxième classe de faisceaux simplement diagonalisables qui ne remplissent pas les critères précédents, génériquement décrite par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; b \in \mathbb{R}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{1+t^2}+1+b\,t & \sqrt{1+t^2}-1-b\,t \\ 0 & t & -t \\ 0 & \sqrt{1+t^2}-1 & \sqrt{1+t^2}+1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Là encore, A est la seule matrice du faisceau avec une valeur propre multiple. Le déterminant de la matrice de passage $P(t)$ vaut $2\,t\sqrt{1+t^2}$, cela montre que le faisceau n'est pas analytiquement diagonalisable, en fait, les deux premiers vecteurs propres ont la même direction limite en $t = 0$. Nous avons $\Re\left(\exp\left(i\,\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta}\right)_{2,1}\right) = \left(2\,\zeta_1 + b\,\zeta_2\right)\frac{\cos|\zeta| - \cos\zeta_1}{\zeta_2}$ et le choix $\boldsymbol{\zeta} = \left(n\,\pi, \sqrt{2\,n+1}\,\pi\right)$ montre que cette composante n'est pas bornée, ainsi le problème de Cauchy $(\mathcal{PC})$ correspondant n'est pas bien posé dans $L^2_{(\mathrm{loc})}(\mathbb{R}^2)^3$.

5. * – Références

[1] S. Friedland, On pointwise and analytic similarity of matrices, Israel Journal of Mathematics, vol 35, nos 1-2,89-108,1980.

[2] H. Gilquin, J. Laurens, C. Rosier, Multi-dimensional Riemann problems for linear hyperbolics systems, Math. Mod. Num. Ana., vol 30, n° 5, 1996, pp 527-548.

[3] H. Gingold, Po-Fang Hsieh, Globally Analytic Triangularization of a Matrix Function, Linear Algebra and Its Applications, 169, 75-101, 1992.

[4] R.M. Guralnick, Similarity of matrices over local rings, Linear Algebra and Its Applications, 41, 161-174, 1981.

[5] J. Laurens, Modélisation de la transmission acoustique, thèse de doctorat de l'Université Claude Bernard Lyon I (1993).

[6] P.D. Lax, Differential Equations, Difference Equations and Matrix Theory, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol XI, 175-194 (1958).

[7] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Spinger-Verlag,Berlin 1966.

[8] T.S. Motzkin, O. Taussky, Pairs of matrices with property L, Trans. Amer.Math. Soc., vol 73 (1952), pp 108-114.

[9] T.S. Motzkin, O. Taussky, Pairs of matrices with property L. II, Trans. Amer.Math. Soc., (1954), pp 387-401.

[10] L. Rodman, Matrix Functions, Handbook of Algebra, vol. 1, edited by M. Hazewinkel, Elsevier Science B.V., pp117-154, 1996.

[11] W. Wasow, On holomorphically similar matrices, J. Math. Anal. Appl 4, (1962) 202-206.

[12] W. Wasow, Topics in the theory of linear ordinary differential equations having singularities with respect to a parameter, publication IRMA, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1978.