

Compte-rendu du congrès  
“Orthogonality, Moment Problems, and Continued Fractions”  
en l’honneur de Thomas Jan Stieltjes Jr. (1856-1894)  
31 Octobre-4 Novembre 1994  
Université technologique de Delft (Pays-Bas)

Hervé Le Ferrand  
Laboratoire d’Analyse Appliquée et d’Optimisation  
Département de Mathématiques  
BP 138, 21004 Dijon cedex  
FRANCE

Novembre 1994

## 1 Introduction

### 1.1 Deux hommages

Un congrès en l’honneur du mathématicien Thomas Jan Stieltjes, né le 29 Décembre 1856 à Zwolle, Pays-Bas, et mort le 31 Décembre 1894 à Toulouse, s’est tenu du 31 Octobre au 4 Novembre 1994 à l’Université Technologique de Delft, Pays-Bas. Delft, 85000 habitants, est une très jolie ville avec ses canaux, son hôtel de ville du *XVII<sup>ième</sup>* siècle, son église du *XV<sup>ième</sup>* siècle dans laquelle se trouve le mausolée de Guillaume le Taciturne. Elle est mondialement connue pour ses faïences. Rappelons qu’il y a un peu plus de cinq siècles, Delft était rattachée à la Bourgogne sous le règne de Philippe le Bon. C’est aussi la ville du grand peintre hollandais Vermeer de Delft (pour admirer ses tableaux il faut se rendre à La Haye ou à Amsterdam). Aujourd’hui, grâce à ses différents établissements universitaires, Delft est un centre intellectuel important. Nos collègues du département de mathématiques Pures de l’Université Technologique de Delft (TU Delft) sous la conduite du professeur Marcel G. de Bruin ont organisé ce congrès. Indiquons d’ailleurs qu’au printemps 95, un second hommage à Thomas Jan Stieltjes sera rendu à l’Université Paul Sabatier de Toulouse sous la conduite du professeur Jean-Baptiste Hiriart-Urruty. En évoquant brièvement la vie de Thomas Jan Stieltjes, nous allons comprendre la raison de cet hommage en deux volets.

## 1.2 La vie de Thomas Jan Stieltjes Jr

TJ Stieltjes est né le 29 Décembre 1856 à Zwolle. Son père était un ingénieur très connu (travaux dans le port de Rotterdam, Canal Stieltjes...), membre du parlement. Il y a en Hollande de nombreuses rues Stieltjes en référence au père et non au fils...(sauf à Leiden) Nous allons nous contenter de donner quelques dates et nous vous renvoyons à l'article de G.Van Dijk paru dans The Mathematical Intelligencer vol 16, No 1, 1994.

- (1) 1873, études à l'Université de Delft (il étudie les travaux de Gauss et Jacobi)
- (2) 1877, assistant à l'Observatoire de Leiden
- (3) 8 Novembre 1882, première lettre d'une longue correspondance avec Charles Hermite (qui se terminera le 15 Décembre 1894)
- (4) 1884, mariage avec Elizabeth Intveld
- (5) 1884, est classé premier sur un poste à l'Université de Groningen, mais le ministère inverse le classement...
- (6) 1885, installation à Paris
- (7) 1889, professeur à l'Université de Toulouse
- (8) 1894/1895, publications dans les Annales de la Faculté de Toulouse de "Recherches sur les Fractions Continues"
- (9) 1894, meurt le 31 Décembre à Toulouse où il est enterré.

## 1.3 Le déroulement du congrès

Il y a eu environ quatre vingt dix participants à ce congrès. Des sessions en parallèle ont été organisées. Il n'y a pas eu réellement de journée à thème, si ce n'est le Mercredi matin où il a été plus particulièrement question de la vie de Thomas Jan Stieltjes et de l'impact de ses travaux dans la théorie des Polynômes Orthogonaux, et le Vendredi où les exposés ont essentiellement porté sur des problèmes de quadrature.

Les journées ont généralement débuté par des séances plénières d'une heure, sauf le Vendredi qui s'est achevé par un exposé d'une heure. Puis nous assistions à des exposés d'une vingtaine de minutes suivis de questions.

Le Mercredi après-midi a été consacré à une excursion en bus à travers la région du Delta (embouchures du Rhin, de la Meuse et de L'Escaut). Suite à la catastrophe de 1953 (raz de marée qui a fait 1800 morts), a été lancé en 1958 le plan Delta, i.e construction de différents barrages de protection. Nous nous sommes rendus au barrage de l'Escaut oriental. C'est un barrage d'une conception extrêmement sophistiquée : il est pourvu d'un système de régulation des eaux pour que l'estuaire reste en communication avec la mer. Tout ceci est fort impressionnant (nous sommes allés à l'intérieur du barrage).Ce qui suit, est un cours résumé des conférences et des exposés auxquels nous avons assisté.

## 2 Les conférences

Nous allons suivre un ordre chronologique.

### 2.1 Lundi 31 Octobre 1994

Après l'ouverture du congrès, au cours de laquelle ont été rappelés les différents congrès sur les Polynômes Orthogonaux (Bar Le Duc 1984, Segovie 1986, Erice 1988, Evian 1992) et où a été présentée l'Université Technologique de Delft, la première conférence plénière a été donnée par N.M Temme de l'Université d'Amsterdam.

**Nico M Temme, Université d'Amsterdam** L'auteur nous parle de développements asymptotiques d'intégrales et de représentation des restes. Il nous présente ensuite le phénomène de Stokes lié à des approximations asymptotiques uniformes et à leur brutal changement quand certaines droites du plan complexe sont traversées (travaux récents de Berry et Olver) ;

**Gabriela Sansigre, Madrid** L'auteur s'occupe de polynômes orthogonaux à coefficients matriciels. Il définit des applications bilinéaires et montre le lien avec les polynômes orthogonaux scalaires (on prend des blocs) ;

**Valéri Kaliaguine, Nizhniy Novgorod, Russie** L'auteur nous explique que Kranselsky et Krein ont développé une théorie spectrale des opérateurs symétriques tridiagonaux. Leurs propriétés spectrales sont liées aux comportements asymptotiques de polynômes orthogonaux relativement à la mesure spectrale d'un tel opérateur ( si on pose  $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ , on développe  $\varphi(\lambda) = (R_\lambda u, u)$  en fractions continues). Depuis quelques années on parle de polynômes vectoriels et d'approximations rationnelles vectorielles. L'auteur utilise ces notions pour obtenir des résultats sur les propriétés spectrales de certains opérateurs ("high order difference operator") ;

**Herbert Stahl, Berlin** L'auteur s'intéresse aux meilleures approximations rationnelles uniformes de  $|x|^\alpha$   $\alpha > 0$  sur  $[-1, 1]$ . Si on note  $E_{nn}$  l'erreur minimale

$$E_{nn}(|x|^\alpha, [-1, 1]) = \inf_{t \in \mathcal{R}_{nn}} \sup_{t \in [-1, 1]} ||t|^\alpha - r(t)|$$

où  $\mathcal{R}_{nn}$  est l'ensemble des fractions rationnelles de degré  $n$ , il a été prouvé que

$$E_{nn}(|x|^\alpha, [-1, 1]) \sim 4^{1+\frac{\alpha}{2}} \left| \sin \frac{\pi}{2} \alpha \right| e^{-\pi \sqrt{\alpha n}}.$$

L'auteur regarde la distribution des pôles et des zéros de  $r_n^*$  meilleure approximation de degré  $n$  ;

**Andrej Jatsko, Gdansk, Pologne** L'auteur donne des résultats sur une classe d'opérateurs singuliers integro-différentiables non normaux ;

**Thomas Dehn, Karlsruhe** L'auteur s'intéresse aux approximants de Padé d'une fonction de Markov  $f_\mu$  (fonction de Stieltjes si  $E \subset \mathbb{R}^+$ ), i.e

$$f_\mu(z) = \int_E \frac{d\mu(x)}{1-xz}.$$

Si  $\mu \in M(0, 1)$  alors uniformément localement pour  $\frac{1}{z} \notin \text{supp}\mu$  on a :

$$\frac{f_\mu(z) - [n, n+1]_{f_\mu}(z)}{f_\mu(z) - [n-1, n]_{f_\mu}(z)} \rightarrow \frac{1}{\Phi(\frac{1}{z})^2}$$

( $\Phi$  est une transformation conforme du plan complexe privé du segment  $[-1, 1]$  sur l'extérieur du disque unité). L'auteur fait observer que l'on peut accélérer la suite  $([n, n-1]_{f_\mu})$  par le  $\Delta^2$  d'Aitken. Il propose quelques problèmes ouverts ( quand y-a-t-il des résultats du même type pour les suites  $([2n, n]_f)$  ou  $([2n-1, n]_f)$  ? etc... ) ;

**Kathy Driver, Witwatersrand, Afrique du Sud** L'auteur considère des approximations de la fonction exponentielle du type :

$$E_{mns} = P_n(z)e^{-2z} + Q_m(z)e^{-z} + R_s(z) = O(z^{m+n+s+2})$$

où  $P_n, Q_m$  et  $R_s$  sont des polynômes de degré au plus  $n, m,$  et  $s$  au plus respectivement. Hermite avait considéré de telles expressions pour prouver la transcendance de  $e$ . Récemment Peter Borwein a donné des formules explicites pour les cas  $m = n = s$ . L'auteur regarde ce qui se passe sur le disque unité.

## 2.2 Mardi 1<sup>ier</sup> Novembre 1994

**Lisa Lorentzen, Trondheim, Norvège** L'auteur, très connue pour ses travaux sur les fractions continues, dresse un panorama des résultats de convergence pour les fractions continues. La théorie de la convergence pour les fractions continues a connu un développement rapide depuis 1941, notamment grâce à W.J. Thron, présent à ce congrès. Pour en revenir à T.J. Stieltjes donnons en français le début du résumé de l'exposé de Lisa Lorentzen :

- on se donne une suite  $(\mu_n)$  de réels (moments) ;
- on cherche une mesure  $\mu$  sur  $[0, \infty]$  telle que

$$\mu_n = \int_0^\infty x^n d\mu(x) \text{ pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

- Stieltjes prouva que se problème a une solution si et seulement si la série formelle

$$L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu_n}{z^{n+1}}$$

a une fraction continue correspondante de la forme

$$K(z) = \frac{1}{a_1 z + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3 z} + \frac{1}{a_3 z + a_4} + \dots \text{ avec les } a_n > 0$$

De plus  $K(z)$  converge uniformément localement dans le plan complexe privé de la demi droite négative si  $\sum_0^\infty a_n = \infty$ .

**F. Marcellan, Madrid** Il est question d'opérateurs différentiels et de polynômes orthogonaux sur des espaces de Sobolev ;

**H.T. Koelink, UC Louvain, Belgique** L'auteur parle de polynômes de Lommel (ceux ci sont liés aux fonctions de Bessel). Ils vérifient une relation de récurrence à trois termes. L'auteur donne l'expression de la fonctionnelle définissant ces polynômes ;

**K.H. Kwon, Taejon, Corée** L'auteur examine une équation linéaire différentiellespectrale à coefficients polynômiaux. Il cherche des conditions pour qu'il existe un système de polynômes orthogonaux de Sobolev solution de l'équation. Il évoque des travaux de Bochner, 1939, de Krall, 1938, de Mejer, 1993 ;

**Stanislaw Lewanowicz, Wroclaw, Pologne** De nouveaux résultats sur les polynômes associés sont donnés ;

**Alphonse P. Magnus, Louvain, Belgique** Il est question de SNUL, "special non uniform lattice" ;

**Tom Koornwinder, Amsterdam** Des formules explicites de polynômes orthogonaux à deux variables sur un domaine borné par une droite et une parabole ou sur un triangle sont établies. L'auteur est correspondant du SIAM, membre du groupe "Orthogonal Polynomials" (poly@siam.org et poly-request@siam.org) ;

**J. Dombrowski, Dayton, Etats-Unis** L'auteur considère un système de polynômes défini par une relation de récurrence à trois termes. Les coefficients de la relation définissent un opérateur matriciel auto-adjoint dont la mesure spectrale est la mesure d'orthogonalité pour le système de polynômes. L'auteur impose des conditions sur les coefficients et analyse la mesure spectrale ;

### 2.3 Mercredi 2 Novembre 1994

**G. Van Dijk, Leiden, Pays-Bas** La vie de T.J. Stieltjes est retracée. L'auteur évoque la tentative de démonstration de la conjecture de Riemann par T.J. Stieltjes (erreur sur une majoration d'une fonction de Möbius) ;

**Walter Van Assche, KU Leuven, Belgique** L'auteur s'intéresse à l'impact des travaux de Stieltjes sur la théorie des polynômes orthogonaux. En particulier, avec l'utilisation d'un ordinateur et d'un rétroprojecteur, il explique que les zéros des polynômes de Jacobi (Laguerre, Hermite) peuvent être interprétés comme des positions d'équilibre d'un problème d'électrostatique faisant intervenir un nombre fini de charges ;

## 2.4 Jeudi 3 Novembre 1994

**Christian Berg, Copenhague, Danemark** L'auteur montre le lien entre un problème de moments de Hamburger et la théorie des fonctions entières. La paramétrisation du convexe compact des mesures solutions du problème dépend d'une matrice de Nevanlinna de quatre fonctions entières associées au problème via le système des polynômes orthonormés et du système des polynômes de seconde espèce associés. Il est ensuite question de fonction de type exponentiel. L'auteur souligne que récemment, des matrices de Nevanlinna ont été calculées explicitement ;

**Paul Nevai, Colombus, Etats-Unis** L'auteur propose une démonstration du théorème de Poincaré pour les suites récurrentes, i.e :

$$\text{si } f(n) + \alpha_{n,1}f(n-1) + \dots + \alpha_{n,k}f(n-k) = 0, \quad n = k, k+1, \dots,$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,j} = a_j \text{ pour } j = 1, \dots, k$$

alors

$$f(n) = 0 \text{ pour } n > n_0 \text{ ou } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \zeta$$

ou  $\zeta$  un est zéro du polynôme

$$p(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_{k-1}x + a_k$$

supposé avec  $k$  zéros ayant des modules différents. Comme les polynômes orthogonaux vérifient une relation de récurrence à trois termes, on voit donc un moyen d'obtenir des asymptotiques pour les polynômes orthogonaux (résultats de Blumenthal) ;

**J.S Dehesa, Grenade, Espagne** Des applications à la physique du problème de moments de Stieltjes pour des fonctions monotones sont données ;

**F.H. Szafraniec, Cracovie, Pologne** L'auteur part d'une relation de récurrence à trois termes :

$$xp_n = a_{n+1}p_{n+1} + b_np_n + a_np_{n-1}.$$

Il considère la matrice de Jacobi cyclique associée et cherche à majorer sa norme ;

**Dario Fasino, Udine, Italie** L'exposé porte sur les propriétés spectrales de matrices de Hankel. L'auteur regarde le conditionnement de ces matrices (encadrement du rapport du conditionnement d'une matrice de Hankel et d'une matrice de Hilbert). Il donne ensuite des exemples numériques .

## 2.5 Vendredi 4 Novembre 1994

**Kai Diethelm, Hildesheim, Allemagne** L'auteur parle de valeur principale de Cauchy

$$I[f; \lambda] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{\lambda-\epsilon} \frac{f(x)}{x-\lambda} dx + \int_{\lambda+\epsilon}^1 \frac{f(x)}{x-\lambda} dx \right)$$

avec  $f \in C^1[-1,1]$  et  $\lambda \in (-1,1)$ . Celle-ci apparait en Mécanique Céleste, en Aérodynamique, en Théorie de l'Elasticité. Les méthodes classiques de quadrature de Gauss ne donnant pas de bons résultats numériques, il propose et étudie une méthode qu'il appelle quadrature de Gauss de troisième espèce ;

**Sven Ehrich, Hidesheim, Allemagne** L'auteur donne une représentation asymptotique des polynômes que l'on appelle communément "polynômes de Stieltjes" (Stieltjes avait introduit les polynômes  $E_n$  satisfaisant à :

$$\int_{-1}^1 P_n(x)E_{n+1}(x)x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

où les  $P_n$  sont les polynômes de Legendre) ;

**Ann Sinap, KU Leuven, Belgique** Il est question de quadrature de Gauss pour des fonctions à une variable à valeurs matricielles. Après avoir rappelé la théorie, l'auteur explique comment elle utilise le calcul parallèle pour faire ces quadratures ;

**Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, Toulouse** Après avoir évoqué la vie de Thomas Jan Stieltjes à Toulouse ( il a eu pour collègues E. Goursat, E. Picard, G. Koenigs, Baillard et Paul Sabatier avec lequel il créa les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse), l'auteur parle de problèmes de non-différentiabilité et illustre son propos par différents exemples (problème de la plus grande valeur d'une matrice dont les coefficients sont des fonctions d'une variable,...) .

**Franz Peherstorfer, Linz, Autriche** Il est question de polynômes de Stieltjes et de quadrature de Gauss-Kronrod.

Marcel G. de Bruin clôt le congrès en sortant un beau marteau d'adjudicateur !

### 3 Conclusion

Le congrès a été très bien préparé tant au niveau des conférences, qu'au niveau culturel. Grâce aux différents exposés nous avons pu mesurer l'importance des travaux de Thomas Jan Stieltjes en Mathématiques et nous rendre compte du dynamisme des chercheurs dans les domaines des polynômes orthogonaux, des problèmes de moments et des fractions continues.