Fonctions d'itérations vectorielles, itérations rationnelles.

Jérôme Laurens et Hervé Le Ferrand
Université de Bourgogne

SEA95

Vector iterations, rational iterations

Abstract

We deal with polynomial systems of equations. The use of extrapolation methods for solving these systems, leads to vector rational iterations.Some results on rational iteration are proved. We take an interest in the image of a regular curve by the Henrici's method. Our purpose is to obtain domains of the plane where the iterations are well defined. By using Maple, some examples based on the Henrici's transform are given.

Introduction

Dans le cas scalaire , la méthode de **Steffensen** appliquée à la résolution de $f(x) = x$:

$$L(x) = \begin{cases} x - \frac{(f(x)-x)^2}{f(f(x))-2f(x)+x} & , f(f(x)) - 2f(x) + x \neq 0 \\ x & , f(f(x)) - 2f(x) + x = 0 \end{cases}$$

$$x^{k+1} = L(x^k) \textit{ partant de } x_0.$$

si $f'(s) \neq 1$ convergence quadratique , sur la dynamique de telles itérations voir Iserles.

Soit à résoudre le système

$$(\star) \qquad f(x) = x$$

avec $f : \Omega \subset I\!R^n \to I\!R^n$, Ω ouvert de $I\!R^n$.

- on a isolé un point fixe $x^\star$ de f.
- hypothèse classique que f est différentiable en $x^\star$ avec la matrice $f'(x^\star) - I$ inversible (I est la matrice identité $n \times n$).

La méthode de **Newton** : on prend la fonction d'itération suivante

$$F(x) = x - (f'(x) - I)^{-1}(f(x) - x)$$

et on calcule les termes de la suite

$$x^{k+1} = F(x^k)$$

x^0 fixé.
Si f est de classe C^1 sur un voisinage de $x^\star$, F est différentiable en $x^\star$ et $F'(x^\star) = 0$. La suite $x^{k+1} = F(x^k)$, avec x^0 suffisamment proche de $x^\star$, va converger vers $x^\star$. On a une convergence superlinéaire.

On peut construire aussi des fonctions d'itérations à partir de méthodes d'extrapolation vectorielle.

- la méthode d'**Henrici** (**1964**),
- l'epsilon algorithme vectoriel de **Wynn** (**1962**)
- l'epsilon algorithme topologique de **Brezinski** (**1975**)
- M.P.E ("Minimal Extrapolation Algorithm") **Cabay, Jackson**(**1976**)

Nature de la fonction d'itération G et convergence :

a) elle nécessite le calcul d'un certain nombre d'itérées de f, mais pas le calcul d'une matrice jacobienne.

b) si f' est lipschitzienne, convergence quadratique , mais avec une hypothèse très forte, dite **hypothèse d'uniforme inversibilité** (Ortega-Rheinboldt 1970)(résultat de convergence : Ortega-Rheinboldt 1970, Noda 1984, Jbilou-Sadok 1990, Nievergelt 1991, HL 1993)

c) en général, la fonction G n'est pas prolongeable par continuité en $x^\star$ en une fonction encore notée G satisfaisant à $G(x^\star) = x^\star$. La même remarque vaut pour la différentiabilité.

Projet : trouver des régions du plan stables pour la fonction d'itérations.
Si f est polynomiale i.e

$$f = (P_1, \dots, P_n) \textit{ où } P_i \in I\!R[x_1, \dots, x_n],$$

la fonction d'itération vectorielle est une fraction rationnelle vectorielle à plusieurs variables

On supposera dans toute la suite que $x^\star = 0$.

Itérations rationnelles dans $I\!R^n$

Notations

$$H(x) = \left(\frac{N_1}{D}(x), \ldots, \frac{N_n}{D}(x)\right)$$

$N_i \in I\!R[x]$ $(x = (x_1, \ldots, x_n))$ et $D \in I\!R[x]$.
Si $P \in I\!R[x]$ est de degré total d, on écrira :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq d} c_\alpha x^\alpha$$

avec les conventions ;

$$si\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n\ et\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

On supposera que $N_i(0) = D(0) = 0$ et que pour tout i, N_i et D sont premiers entre-eux.

$$\partial^\circ N_i = d_i\ et\ d = \sup_i d_i$$

$$N_i = \sum_{|\beta| \leq d} c_\beta^{(i)} x^\beta\ et\ D = \sum_{|\gamma| \leq d'} d_\gamma x^\gamma$$

$$p_i = \inf_\beta(|\beta|, c_\beta^{(i)} \neq 0)\ (\in I\!N^*)\ et\ q = \inf_\beta(|\beta|, d_\beta \neq 0)\ (\in I\!N^*)$$

(on a ainsi :

$$N_i = \sum_{|\beta| = p_i} c_\beta^{(i)} x^\beta + \sum_{p_i < |\beta| \leq d} c_\beta^{(i)} x^\beta\ et\ D = \sum_{|\gamma| = q} d_\gamma x^\gamma + \sum_{q < |\gamma| \leq d'} d_\gamma x^\gamma)$$

$$r = \|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}},\ \mathcal{S}_{n-1} = \{x \in I\!R^n / \|x\| = 1\}$$

$$si\ A \in I\!R^n,\ c\hat{o}ne(A) = \{ta\ /\ t \in I\!R^+,\ a \in A\}.$$

Expression de $\frac{N_i}{D}$

Lemme 1 *Il existe des polynômes S_i et T_i, $i = 1$ à n, et deux polynômes S et T tels que :*

a) S_i est homogène de degré p_i et S est homogène de degré q ;

b)
$$\frac{N_i}{D}(x) = r^{p_i - q} \frac{S_i(\frac{x}{r}) + rT_i(r, \frac{x}{r})}{S(\frac{x}{r}) + rT(r, \frac{x}{r})}.$$

S ne s'annulle pas sur la sphère unité

Proposition 1 *On suppose que S ne s'annulle pas sur $\mathcal{S}_{n-1}$ et que $\alpha = \inf_i(p_i - q) \geq 2$.*
Alors on peut prolonger par continuité H en 0 en posant $H(0) = 0$. H est de plus différentiable en 0 avec $H'(0) = 0$. On a de plus :
$$\|x^{k+1}\| = O(\|x^k\|^\alpha)$$

Remarque 1 *Si $\alpha = 1$, on prolonge toujours H par continuité en 0, en posant $H(0) = 0$. On perd cependant la différentiabilité et il faut regarder*
$$\min_i \inf_{r \in I\!R^+} \sup_{x \in \mathcal{S}_{n-1}} \left| \frac{S_i(x) + rT_i(r, x)}{S(x) + rT(r, x)} \right|.$$

Remarque 2 *Dans $I\!R^2$, la condition*
$$\exists M > 0 \; \forall x \in \mathcal{S}_{n-1} \; |S(x)| \geq M$$

équivaut à : le polynôme à une variable $S((1,t))$ a même degré que S et n'a pas de racine réelle.

S s'annulle sur la sphère unité
S s'annulle sur $\mathcal{S}_{n-1}$, considérons $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}_{n-1} \backslash \mathcal{N}$ une partie compacte et donnons une condition suffisante de convergence :

Proposition 2 *Si la propriété suivante est vraie*

pour tout $x \in I\!R^n$, x dans cône($\mathcal{K}$) entraine $\dfrac{H(x)}{\|H(x)\|}$ dans $\mathcal{K}$

et si de plus $\alpha \geq 2$, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de 0 tel que si $x^0 \in \mathcal{W} \cap$ cône($\mathcal{K}$), la suite

$$x^{k+1} = H(x^k)$$

est définie, converge vers 0 et

$$\|x^{k+1}\| = O(\|x^k\|^\alpha).$$

Remarque 3 *La condition $H(x) \in$ cône($\mathcal{K}$) est indépendante du dénominateur D de la fonction H.*

Remarque 4 *Dans $I\!R^2$, l'ensemble $\mathcal{N}$ est fini.*

Exemple 1 *On considère la fonction :*

$$H(x) = (\frac{x_1^3}{x_1 - x_2}, \frac{x_2^3}{x_1 - x_2}).$$

On a ici, $S(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ *et* $\alpha = 2$. *On peut prendre pour* $\mathcal{K}$, *l'ensemble*

$$\mathcal{S}_{n-1} \cap \mathcal{A}$$

où $\mathcal{A}$ *est égal à*

$$\begin{aligned} \{x_1 \geq 0, x_2 \geq (1+\epsilon)x_1\} &\cup \{x_1 \leq 0, x_2 \geq (1-\epsilon)x_1\} \\ &\cup \{x_1 \leq 0, x_2 \leq (1+\epsilon)x_1\} \\ &\cup \{x_1 \geq 0, x_2 \leq (1-\epsilon)x_1\} \end{aligned}$$

($0 < \epsilon < 1$*).*

Méthode d'Henrici pour un couple de polynômes

Rappels

(a) on choisit un vecteur x^0 ;

(b) à l'étape k on pose $u^0 = x^k$, on calcule u^1, u^2, u^3, par

$$u^{i+1} = f(u^i), \ i = 0, \ 1, \ 2,$$

puis on pose

$$x^{k+1} :=$$

$$u^0 - [u^1 - u^0, u^2 - u^1][u^2 - 2u^1 + u^0, u^3 - 2u^2 + u^1]^{-1}(u^1 - u^0)$$

(c) test, retour en (b).

On a formellement :
G(x):=
$x-[f(x)-x, f^2(x)-f(x)][f^2(x)-2f(x)+x, f^3(x)-2f^2(x)+f(x)]^{-1}(f(x)-x).$
(f^i la $i^{ième}$ itérée de f)
On pose $f = (P_1, P_2)$ et on suppose toujours que le point fixe est l'origine.

Développement limité de l'itération de Henrici
$x(t)$ courbe régulière paramétrée par t, $x(0) = 0$, nous cherchons son image par G. Nous posons :

$$x(t) = t.\gamma + \frac{t^2}{2}.\delta,\ (\gamma, \delta \in I\!R^2)$$

$$f(x) = \nabla.x + \frac{1}{2}.x^T.D.x,\ \nabla \in \mathcal{M}_2(I\!R), D \in (\mathcal{M}_2(I\!R))^2$$

∇ est la jacobienne de f en 0, $D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$ où D_1 est la hessienne de f_1 en 0, D_2 la hessienne de f_2 en 0,

$$A = \nabla - I,\ B = [\gamma, \nabla.\gamma],\ A, B \in \mathcal{M}_2(I\!R).$$

Proposition 3 *Le développement limité de la courbe* $t \mapsto G(x(t))$ *en* $t = 0$ *a pour partie principale*

$$G(x) \approx \frac{t^2}{2} dev(G, \gamma)$$

où $dev(G, \gamma)$ *est le vecteur :*

$$\begin{aligned} dev(G,\gamma) &= A^{-1}.(-\gamma^T.D.\gamma - ([\gamma^T.D.\gamma, (\nabla.\gamma)^T.D.\nabla.\gamma] \\ &\quad +[(\nabla.\gamma)^T.D.\nabla.\gamma, (\nabla^2.\gamma)^T.D.\nabla^2.\gamma])\Omega), \end{aligned}$$

Ω *étant un vecteur qui ne dépend que des coefficients de la matrice* ∇.

Remarque 5 *Notons que ce développement confirme le caractère quadratique de la méthode.*

Remarque 6 *Si f_1 et f_2 sont des polynômes, G est rationnelle, donc le coefficient de t^2 est à priori une fraction rationnelle en les coordonnées du vecteur γ. En fait on a mieux, ce coefficient est une fonction polynômiale vectorielle de degré 2 des coordonnées de γ.*

Remarque 7 *Ce développement reste valable même si γ est un vecteur propre de ∇.*

Domaines de stabilité
On associe au vecteur $\gamma = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ le vecteur $dev(G, \gamma)$. Dans la pratique, une méthode possible est de considérer

$$u : \theta \mapsto argument(dev(G, \gamma))$$

Exemples

Exemple 1 (Ortloff)

$$f = (\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{6}x_2 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{12}, -\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{12}).$$

Si $G = (G_1, G_2)$, on obtient :
$G_1 = G_2 =$

$$-\frac{-x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - 8x_1^3x_2 + 12x_1^2x_2^2 - 8x_1x_2^3 + 2x_1^4 + 2x_2^4 - x_2^3}{157x_1^2 - 314x_1x_2 - 200x_1 + 157x_2^2 - 200x_2}$$

En remarquant que si $x_1 \neq 0$, $G(x_1, x_1) = 0$, on obtient donc 0 en itérant deux fois G !

Remarque 8 *Si u est une application linéaire inversible, la fonction d'itération de Henrici associée à la fonction $u^{-1}\circ f\circ u$ est égale à $u^{-1}\circ G\circ u$. Donc en fait dans le cas de l'exemple ci-dessus, avec un bon choix de u, on est ramené au cas de la fonction*

$$(x_1, x_2) \mapsto (\frac{x_1}{6} + \frac{x_1x_2}{3\sqrt{2}}, \frac{x_2}{2}).$$

Exemple 2

La partie linéaire de f est une homothétie de rapport a différent de 1 et de -1 :

$$f = (ax + \frac{x_1^2}{2} + x_1x_2 + \frac{x_2}{3}, ax_2 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

Le dénominateur de G prend la valeur $93312(a+1)^2(a-1)^4$ au point $(0,0)$. G est donc définie, continue, différentiable en 0 et on peut voir que $\alpha \geq 3$.

Exemple 3

$$f = (-2x_1 - 3x_1^2 + 3x_2^2, 2x_2 + 2\lambda x_1x_2)$$

L'ellipse correspondante est donnée par :

$$\theta \mapsto (4\cos(2\theta), 4\lambda\sin(2\theta)).$$

On a $S(\cos(\theta), \sin(\theta)) = -12\cos(\theta)$.La fonction u admet 0 comme point fixe. La dérivée en 0 vaut 2λ. On peut donc affirmer que dans le cas où $|\lambda| < \frac{1}{2}$, il existe un secteur stable autour de l'axe des abscisses pour l'itération. Si $\lambda = 1$, on a un cercle et dans ce cas il n'y a pas de région stable.

Exemple 4

$$f = (-2x_1 - 3x_1^2 + 3x_2^2, 2x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2).$$

On obtient une ellipse de nouveau centrée à l'origine. On a $S(\cos(\theta), \sin(\theta)) = -6\sin(\theta)$. Il n'est pas possible de déterminer de région stable.

Exemple 5

$$f = (-x_1 - 3x_1^2 + 3x_2^2, 2x_2 + 2x_1x_2)$$

L'origine se trouve à l'extérieur de l'ellipse. On a $u([-\pi, \pi[= [-\pi + 0.05, -\pi + 1]$ et $S(\cos(\theta), \sin(\theta)) = -6\sin(2\theta)$. On a un secteur angulaire stable pour l'itération.