# Le théorème de Kreiss

H. Le Ferrand, leferran@u-bourgogne.fr

June 25, 2009

Le thérorème de Kreiss est un résultat de 1962. On le trouvera dans "Difference Methods for initial-value problems", de R.D. Richtmyer, K.W. Morton, Interscience Publishers, John Wiley and Sons, New York, 1967.

A la page 73, la définition d'une famille stable de matrices est donnée, puis le théorème de Kreiss caractérise une telle famille.

**Définition 0.1** $\mathcal{F}$ une famile de matrice $p \times p$ est dite stable s'il existe $C \geq 0$ tel que :

$$\forall A \in \mathcal{F}\ \forall \nu \in I\!N \quad \|\mathcal{A}^\nu\| \leq \mathcal{C}. \tag{1}$$

**Remarque 0.2** Les valeurs propres de $A$ sont de modules $\leq 1$.

**Théorème 0.3** La stabilité de $\mathcal{F}$ équivaut à une des assertions suivantes :

(R) Il existe $C_R$ tel que : $\forall A \in \mathcal{F}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > 1$, $(A - zI)^{-1}$ existe et

$$\|(A - zI)^{-1}\| \leq \frac{C_R}{|z| - 1}.$$

(S) Il existe $C_S$ et $C_B$ tels que : $\forall A \in \mathcal{F}$ $\exists S$ inversible telle que

(i) $\|S\|, \|S^{-1}\| \leq C_S$

(ii)

$$B = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \chi_1 & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1p} \\ & \chi_2 & B_{23} & \cdots & B_{2p} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \chi_p \end{pmatrix}$$

avec $|B_{ij}| \leq C_B \min(1 - |\chi_i|, 1 - |\chi_j|)$ où les $\chi_i$ sont les valeurs propres de $A$.

(H) Il existe $C_H > 0$ tel que : $\forall A \in \mathcal{F}$, $\exists H$ hermitienne telle que :

$$C_H^{-1} I \leq H \leq C_H I$$

et

$$A^\star H A \leq H.$$

(si $A$ et $B$ sont deux matrices hermitiennes, $A \leq B$ si pour tout vecteur colonne $u$, $u^\star A u \leq u^\star B u$.)

Avec les notations habituelles (voir l'article), si $\sup_{\alpha \in I\!R^n} \|e^{i \sum_j \alpha_j A_j}\| < +\infty$, la famille $\left(e^{i \sum_j \alpha_j A_j}\right)_\alpha$ est stable. Les valeurs propres d'une telle matrice valent 1. Il existe donc $C > 0$ tel que $\forall \alpha \in I\!R^p$, $\exists S(\alpha)$ telle que : $\|S(\alpha)\| \leq C$, $\|S(\alpha)^{-1}\| \leq C$ et $S(\alpha) e^{i \sum_j \alpha_j A_j} S(\alpha)^{-1} = e^{iD(\alpha)}$ où $D(\alpha)$ est la matrice diagonale des valeurs propres de $e^{i \sum_j \alpha_j A_j}$. A ce stade, on aimerait conclure par :

$$S(\alpha) \left( \sum \alpha_j A_j \right) S(\alpha)^{-1} = D(\alpha).$$

Faisons quelques remarques :

**Remarque 0.4** Si $M$ est inversible et $M^2$ diagonalisable alors $M$ aussi.

**Remarque 0.5** si $Se^{iA}S^{-1} = e^{iD}$, il n'est pas vrai en général que $Se^{i\frac{A}{2}}S^{-1} = e^{i\frac{A}{2}}$.

**Remarque 0.6** Si $\lambda \in I\!R$, $-e^{i\lambda} = e^{i\frac{\lambda+2\pi}{2}}$.

**Remarque 0.7** L'idée est de prendre les "racines" carrées successives de $e^{iA}$, i.e. $e^{i\frac{A}{2}}$, $e^{i\frac{A}{4}}$,... On obtient duex familles, puis une en fait en utilisant la remarque précédente, de sous-espaces décroissantes pour l'inclusion, donc stationnaire à partir d'un certain rang. Ainsi à partire d'un certain rang, toute base diagonalisant "$M^2$" diagonalise "$M$".

**Remarque 0.8** Il suffit de prendre $\frac{A}{2^k}$ pour $k$ assez grand : il existe $k_0 > 0$ tel que :

$$S(\frac{\alpha}{2^{k_0}})e^{i\frac{\sum \alpha_j A_j}{2^{k_0}}}S(\frac{\alpha}{2^{k_0}})^{-1} = e^{i\frac{D(\alpha)}{2^{k_0}}}.$$

Pour $k \geq k_0$, on a :

$$S(\frac{\alpha}{2^{k_0}})e^{i\frac{\sum \alpha_j A_j}{2^{k}}}S(\frac{\alpha}{2^{k_0}})^{-1} = e^{i\frac{D(\alpha)}{2^{k}}}.$$

Il suffit de faire un développement en série entière pour avoir le résultat.