Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques [1]

Travaux par groupes, 12 Octobre 2017

exercice 1 ♣
On considère les suites de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 3x_n + 6y_n - 2z_n \\ y_{n+1} & = & -x_n - 2y_n + z_n \\ z_{n+1} & = & -2x_n - 6y_n + 3z_n \end{array}\right.$$

les conditions initiales x_0, y_0, z_0 étant données dans $\mathbb{R}$. On se propose d'expliciter x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = (x_n, y_n, z_n)^T$ et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $W_n = A^n W_0$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A. Quelles sont ses valeurs propres ?
3. On considère les deux sous-espaces vectoriels $H_1 = \ker(A - I)$ et $H_2 = \ker(A - 2I)$ où I est la matice identité 3×3.
   (a) Ces deux sous-espaces sont-ils en somme directe ?
   (b) Déterminer une base de H_1 et une base de H_2.
   (c) Construire une base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$, formée de vecteurs de H_1 et de H_2.
4. Déduire de ce qui précède une matrice P, 3×3, inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
5. Calculer alors A^n.
6. Conclure en donnant les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et n.

exercice 2 ♣
On travaille dans l'ensemble des matrices carrée $n\times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note cet ensemble $\mathbb{C}^{n\times n}$.

1. Soit $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont distincts deux à deux. Montrer que si M est une matrice telle que $NM = MN$ alors M est diagonale.
   On fixe à présent une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dont on suppose qu'elle possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
2. Expliquer pourquoi il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

1. Licence Sciences L2, M34

3. On suppose que la matrice B commute avec A, i.e $AB = BA$. On pose $C = P^{-1}AP$ et $D = P^{-1}BP$.
   (a) Vérifier que $CD = DC$.
   (b) En déduire que $D = diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.
   (c) Prouver que le système d'inconnues $x_0, \ldots, x_{n-1}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_1^{n-1} x_{n-1} & = & \mu_1 \\ x_0 + \lambda_2 x_1 + \cdots + \lambda_2^{n-1} x_{n-1} & = & \mu_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0 + \lambda_n x_1 + \cdots + \lambda_n^{n-1} x_{n-1} & = & \mu_n \end{array}\right.$$

   admet une solution et une seule $(a_0, \ldots, a_{n-1})$.
   (d) On introduit alors le polynôme $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$. Que vaut C^k, $k \in \mathbb{N}$? Que vaut $p(C)$?
   (e) En déduire que $B = p(A)$. Enoncer alors le résultat obtenu.