Université de Bourgogne    U.F.R des Sciences et Techniques [1]

**Séances 15 et 16**

1. **mise au point sur la définition de la limite d'une fonction numérique en un point** : selon la définition choisie le « théorème de composition » est vrai ou...faux ! Exemple de $g \circ f$ où $f$ est la fonction nulle et $g(x) = 0$ si $x \neq 0$, $g(0) = 1$.
2. Les hypothèses de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral sont **plus fortes** que celle de la formule classique (datant de 1797). On peut à partir du reste intégral, « récuperer » un reste classique en utilisant la **première formule de la moyenne** :

   *Soit $f$ et $g$ deux fonctions numériques continues sur $[a, b]$ $(a < b)$. On suppose $g \geq 0$ sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :*

   $$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt. \tag{1}$$

   Si $h$ est une fonction continue sur $[1, +\infty[$, on a $\lim_{x \to 1} \int_x^{x^2} h(t)dt = 0$. Mais que vaut

   $$\lim_{x \to 1^+} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \ ?$$

3. sur les séries :
   (a) Soit $\sum \alpha_n$ une série réelle. Pourquoi la convergence absolue entraîne la convergence simple ? Soit $(u_n)$ est une suite réelle telle qu'il existe $K > 0$, $\rho \in [0, 1[$ pour lesquels

   $$\forall n \in I\!N \quad |u_{n+1} - u_n| \leq K \rho^n.$$

   Qu'en est-il de la suite ? Examiner le cas d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est une **contraction**.

   (b) Comment faire le produit de deux séries convergentes ? Notion de **produit de Cauchy**.
4. Exemple de développement asymptotique d'une fonction réciproque.
5. Equivalent de la suite définie par $u_{n+1} = \sin u_n$ et $u_0$ pris dans $]0, \frac{\pi}{2}]$.
6. A quoi peut ressembler l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle bornée ? Pourquoi d'ailleurs si une suite bornée réelle admet une seule valeur d'adhérence, elle converge ?
7. Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$. Quel est la distance pour la norme infini de $f$ (sur cet intervalle) à l'ensemble des fonctions constantes ?

1. Licence Sciences L2, M34