Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques[1]

Séances 11 et 12

— mise au point sur le DM1 : différence $\sum_{k=1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k^2}$, on n'a pas $2^{p+1} = 2^p + 1$; on obtient

$$\sum_{k=1}^{2^p} \frac{1}{k^2} \leq 3, \tag{1}$$

et pour conclure que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 3$ pour tout $n \geq 1$, on peut voir que

$$2n \leq 2^n, \ \forall n \in I\!N \tag{2}$$

via la formule du binôme de Newton.

— limite de la suite $n \mapsto \frac{2^n}{n+1}$ **en la comparant avec une suite géométrique**.

— synthèse des deux problèmes traité la semaine précédente.

— utilisation d'une **série génératrice** pour déterminer le terme de rang n de la suite récurrente linéaire :

$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n, \ n \geq 0. \tag{3}$$

— devoir surveillé (voir l'énoncé ci-dessous)

Devoir surveillé du 19 Octobre 2017
Les huit exercices sont indépendants.

exercice 1

Donner le développement limité de exp à l'ordre 4 en 0, puis le développement limité de exp à l'ordre 4 en 1.

exercice 2

Déterminer un équivalent de $h(x) = x^2 \sin(\dfrac{1}{x}) \ln\left(\dfrac{x^3+1}{x^3}\right)$ quand $x \to +\infty$. Calculer ensuite un développement asymptotique de $h(x)$ en $+\infty$.

exercice 3

Soit une fonction f de classe C^{n+1} sur l'intervalle $[0,1]$. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral entre 0 et $x \in [0,1]$. Démontrer cette formule dans le cas de $n = 2$.

A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, établir que pour tout n entier et pour tout $x \geq 0$:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!} \tag{4}$$

Quel résultat peut-on en déduire ?

1. Licence Sciences L2, M34

exercice 4

1. Calculer :
$$I = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}. \tag{5}$$
2. Calculer
$$\int_0^x \sqrt{4-t^2}dt \tag{6}$$
pour x dans un intervalle que l'on précisera.

exercice 5

1. Quelle est la dérivée de la fonction
$$x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}dt?$$
Si u est C^1 sur $I\!R$, dériver la fonction
$$x \mapsto \int_0^{u(x)} e^{-t^2}dt.$$
2. Soit F l'application donnée par :
$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}.$$
Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle définie ? En majorant l'intégrale, déterminer :
$$\lim_{x\to+\infty} F(x).$$

exercice 6

On pose pour $x > 0$:
$$I(x) = \int_1^x \ln(t)dt. \tag{7}$$

1. Calculer $I(x)$ et déterminer les limites en $+\infty$ et 0^+ de $I(x)$.
2. Pour k entier ≥ 1 comparer $\int_k^{k+1} \ln(t)dt$ avec $\ln(k)$ et $\ln(k+1)$. En déduire une majoration de $\ln(n!)$ à l'aide de $I(n)$ et $I(n+1)$. Prouver alors que :
$$\ln(n!) \sim_{n\to+\infty} n\ln(n). \tag{8}$$

exercice 7

Soit A une matrice complexe $n \times n$ à diagonale strictement dominante (sur chaque ligne, le module du coefficient qui est sur la diagonale est strictement supérieur à la somme des modules des autres coefficients de la ligne). Montrer que A est inversible.

En déduire que que si λ est une valeur propre de la matrice complexe $n\times n$, $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, il existe un indice i tel que λ soit dans le disque (fermé) de centre b_{ii} et de rayon $\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |b_{ij}|$.

exercice 8

Soit A une matrice complexe $n \times n$ telle que $A^2 = I$, I étant la matrice identité $n \times n$.

1. A est-elle inversible ?
2. Déterminer les constantes a et b telles que $a(x-1) + b(x+1) = 1$. Montrer que A est diagonalisable.