Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques [1]

Séances 7 et 8

— Factorisation de x^4+1 puis calcul de

$$\int \frac{dx}{1+x^4}.$$

On a à priori :

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{A+Bx}{x^2+x\sqrt{2}x+1} + \frac{C+Dx}{x^2-x\sqrt{2}x+1}$$

On a proposé différentes méthodes pour déterminer les constantes réelles A, B, C et D. Au final :

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\arctan(x\sqrt{2}+1)+\arctan(x\sqrt{2}-1)\Big).$$

— Expression de $x \to \int_0^x \sqrt{1-t^2}dt$, $-1 \leq x \leq 1$:

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}dt = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x).$$

On rappelle à cette occasion un résultat sur le prolongement par continuité d'une fonction dérivée :

> *si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si f' tend vers une limite finie l lorsque x tend vers b^-, alors f est dérivable à gauche en b, la fonction dérivée f' est continue à gauche en b et $f'(b)=l$.*

— La primitive de $exp(x^2)$ sur $I\!R$ qui s'annule en 0 ne s'exprime pas à l'aide de fonctions élémentaires. On peut néanmoins débuter l'étude de cette fonction,

$$x \mapsto \int_0^x e^{t^2}dt,$$

c'est une fonction C^∞ sur $I\!R$, croissante sur $I\!R$, etc.
Si u est une fonction dérivable sur $I\!R$, il en est de même de

$$x \mapsto \int_0^{u(x)} e^{t^2}dt$$

et on peut facilement calculer sa dérivée.

1. Licence Sciences L2, M34

— Fin de la correction de la partie I du sujet 2006. On retiendra que si une suite réelle tend vers une limite finie l, la suite des moyennes arithmétiques tend elle aussi vers l :

$$u_n \to l \in I\!R \Rightarrow \frac{\sum_1^n u_k}{n} \to l,\ n \to +\infty.$$

On peut en déduire que si, (v_n) est une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = l$ avec de plus $l > 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{v_n} = l$.

— **Recherche d'équivalents** : on doit tout d'abord connaître un certain nombre d'équivalents comme

$$\sin x \sim_{x\to 0} x,\ \ln(1+x) \sim_{x\to 0} x,\ \exp(x) - 1 \sim_{x\to 0} x,\ \ldots$$

On prendra garde que l'on ne compose pas en général à gauche des équivalents (hormis les puissances entières).

Si $\lim_{x\to 0} f(x) = l$ avec $l \neq 0$, il n'y a aucun intérêt à écrire que $f(x) \sim_{x\to 0} l$. Par contre, on recherchera un équivalent en 0 de la différence $f(x) - l$.