Séances 5 et 6

— Localiser des valeurs propres d'une matrice carrée complexe. Cas de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On retiendra aussi au passage le résultat suivant : **une matrice carrée réelle symétrique est diagonalisable sur $I\!R$ (et d'ailleurs orthogonalement diagonalisable)**. Une matrice réelle carrée P est dite **orthogonale** si $P^{-1} = P^T$.

— Pour deux entiers naturels m et n, on a en faisant correctement des intégrations par parties :

$$\int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!}\frac{(x-a)^n}{n!}dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}$$

Expression de $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$.

— **La** primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sur l'intervalle $I\!R$ qui s'annule en 0 est $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$ et admet donc une limite en $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

La primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ sur l'intervalle $I\!R$ qui s'annule en 0 est :

$$x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

De plus, on a par exemple $\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$ (on doit être capable d'expliquer rigoureusement et rapidement que $\lim_{t\to+\infty} t^{2017}e^{-t} = 0$) ce qui permet de montrer que la **fonction croissante** $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}$ admet une limite finie en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

— Intégration de fractions rationnelles $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $\deg P < \deg Q$.

1. Licence Sciences L2, M34

— On décompose en **éléments simples sur** $\mathbb{R}$ la fraction. On s'appuie sur : dans $\mathbb{C}[x]$ les polynômes irréductibles sont exactement les polynômes de degré 1 ; dans $\mathbb{R}[x]$ les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant négatif. Ainsi à priori :

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

— Savoir faire un **changement de variable** (ici linéaire) pour calculer :

$$\int \frac{dt}{7+t^2},\ \int \frac{dx}{x^2+x+1},$$

puis

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx.$$

— Factorisation de x^4+1 puis calcul de

$$\int \frac{dx}{1+x^4}.$$

— Suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, savoir expliquer qu'une limite éventuelle l vérifie $f(l) = l$ sous une hypothèse de **continuité** pour f.