Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques [1]

Séances 23, 24 et 25

1. Expression de l'erreur $f(x) - p(x)$ entre une fonction et son polynôme d'interpolation de Lagrange en $n+1$ points distincts deux à deux.
   Amélioration de cette ereur par le choix des zéros du polynôme de Tchebychev T_{n+1}.
2. Calcul du polynôme d'interpolation en des points équidistants par la méthode des **différences finies**.
3. **Equivalents de restes ou de sommes partielles pour des séries à termes positifs équivalents**. Equivalent du reste à l'ordre n de la série
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$
4. Primitive sur $I\!R$ de la fonction
$$x \mapsto \frac{1}{2+\cos x}$$
(changement de variable $u = \tan \dfrac{x}{2}$ et recollement).

Interpolation : exemples tirés de
« Analysis and its history », E. Hairer, G. Wanner, Springer 2000.

FIGURE 1 – Sir Isaac Newton 1643 - 1727

On se donne $n+1$ points (x_i, y_i) d'abscisses distinctes et on cherche un polynôme de degré n -au plus- passant par ces $n+1$ points. Limitons-nous ici au cas où $x_i = i$.

1. Licence Sciences L2, M34

1. Supposons que $n = 3$ et posons donc $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$. Vérifier que notre problème se ramène au système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} A & = & y_0 \\ A+B+C+D & = & y_1 \\ A+2B+4C+8D & = & y_2 \\ A+3B+9C+27D & = & y_3 \end{array}\right. .$$

   On résoud ce système de la manière suivante, i.e. par élimination :

$$\left\{\begin{array}{lcl} B+C+D & = & y_1 - y_0 =: \Delta y_0 \\ B+3C+7D & = & y_2 - y_1 =: \Delta y_1 \\ B+5C+19D & = & y_3 - y_2 =: \Delta y_2 \end{array}\right.$$

   puis

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2C+6D & = & \Delta y_1 - \Delta y_0 =: \Delta^2 y_0 \\ 2C+12D & = & \Delta y_2 - \Delta y_1 =: \Delta^2 y_1 \end{array}\right.$$

   et enfin

$$6D \quad = \quad \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 =: \Delta^3 y_0 \ .$$

   Montrer que :

$$y = y_0 + \frac{x}{1}\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0.$$

2. On considère les $n+1$ points $x_i = i$, $i = 0 \ldots n$. Donner l'expression du polynôme y de degré n tel que[2] :

$$y(x_i) = y_i, \ i = 0 \ldots n.$$

   On utilisera les quantités :

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \ \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \ldots$$

3. Proposez, comme l'a fait Newton en 1676, un schéma pour calculer les différentes quantités $\Delta^k y_i$.

A titre d'exercice :

1. Appliquer le schéma de la dernière question de l'exercice précédent au polynôme $y = x^3$. Le résultat obtenu est-il surprenant ?
2. Trouver le polynôme y de degré ≤ 5 qui vérifie :

$$y(0) = 4, \ y(1) = 5, \ y(2) = 2, \ y(3) = 5, \ y(4) = 2, \ y(5) = 2.$$

2. Est-on bien sûr qu'il soit de degré n ?