Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques [1]

Séances 21 et 22

1. **Polynôme de Tchebychev** (fiche 6) : fonction génératrice pour cette famille de polynômes (méthode semblable à celle vue pour déterminer la fonction génératrice d'une suite récurrente linéaire à coefficients constants) ; démonstration et interprétation du théorème fondamental sur les polynômes de Tchebychev de première espèce (distance en norme infinie $\|\cdot\|_\infty$ entre le polynôme x^n et le sous-espace constitué par les polynômes de degré $\leq n-1$).
2. D'autres familles de polynômes orthogonaux « classiques » : polynômes de Laguerre, de Hermite, de Legendre.
3. **Polynôme d'interpolation** : existence et unicité dans le cas de points (noeuds) distincts deux à deux via un système linéaire dont la matrice est une matrice de Vandermonde ; simplification du problème en prenant comme base (Newton)
$$1,\ x-x_0,\ (x-x_0)(x-x_1),\ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\dots \tag{1}$$
Pour la manipulation des polynômes élémentaires de Lagrange, introduction du polynôme $\pi(x)=\prod_{i=0}^n(x-x_i)$ et ainsi :
$$\pi'(x_i)=\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(x_i-x_j) \tag{2}$$
$$l_i(x)=\frac{\pi(x)}{\pi'(x)(x-x_i)}. \tag{3}$$
4. Devoir surveillé (2h)

Devoir surveillé du 30 Novembre 2017
Les 8 exercices sont indépendants.

exercice 1

On considère une application $f : I\!R \to I\!R$ dérivable en 0 et telle qu'il existe $\rho \in I\!R - \{-1,0,1\}$ tel que :
$$\forall x \in I\!R,\ f(\rho x)=\rho f(x).$$

1. Vérifier que $f(0)=0$.
2. Etablir que pour tout entier n non nul :
$$f(x)=\frac{1}{\rho^n}f(\rho^n x).$$

1. Licence Sciences L2, M34

3. En déduire qu'il existe une constante réelle α tel que $f(x) = \alpha x$ pour tout réel x (on pourra commencer par le cas $|\rho| < 1$).

exercice 2
En utilisant la décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$, déterminer à l'aide d'une minoration de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ un entier N tel que cette dernière quantité soit supérieure ou égale à 10 si $n \geq N$.

exercice 3
On sait que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente. Retrouver ce résultat en utilisant la notion de suite de Cauchy, c'est-à-dire en montrant que la suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy (on commencera par écrire avec des quantificateurs qu'une suite de réels n'est pas de Cauchy).

exercice 4
On pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \;\; A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

1. Montrer que $A_{2n} = H_{2n} - H_n$.
2. En déduire que $A_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Que vaut alors $\lim_{n\to+\infty} A_{2n}$?
3. Conclure.

exercice 5
On considère dans $\mathbb{R}^4$ trois sous-espaces vectoriels F, G et H tels que $F \cap G = \{0\}$ et $(F + G) \cap H = \{0\}$. Que peut-on dire de la somme $F + G + H$? Justifier votre réponse.

exercice 6

1. Soit x et y deux matrices colonnes réelles $n \times 1$ non nulles. Quel est le rang de la matrice xy^T ? Décrire son noyau.
2. Soit x une matrice colonne réelle $n \times 1$ non nulle. La matrice xx^T est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
3. Soit $E_{i,j}$ la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf l'élément de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne qui vaut 1. Donner l'expression de $E_{i,j}E_{h,k}$.

exercice 7
Soit A une matrice carrée complexe, on suppose qu'il existe un polynôme P dont le coefficient constant est non nul et tel que $P(A) = 0$. Montrer que A est inversible et que A^{-1} est un polynôme en A.

exercice 8
Soit M une matrice carrée complexe $n \times n$ telle que pour tout $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ on ait (x, Ax) lié. Montrer que M est une homothétie.