Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques [1]

Télescopages, Découpages (fiche 9)

exercice 1
On considère la suite (x_n) définie par :

$$x_0 = 5, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \ (n \geq 1).$$

a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

b) On pose $u_k = x_k^2 - x_{k-1}^2$ pour $k \geq 1$. Exprimer de deux façons différentes, $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

c) En déduire que :

$$x_n > \sqrt{25+2n}.$$

exercice 2 (**Equivalents pour les séries à termes** ≥ 0)
On suppose que $u_n \geq 0$, $v_n \geq 0$ et $u_n \sim v_n$ quand $n \to \infty$.
Montrer :

1. Si $\sum u_n$ converge, les restes sont équivalents, i.e. :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k, \ n \to \infty.$$

2. Si $\sum u_n$ diverge, les sommes partielles sont équivalentes, i.e. :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{0}^{n} v_k, \ n \to \infty.$$

Supposons que $u_n = f(n)$, f continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs positives. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$, d'après le théorème des accroissements finis :

$$F(n+1) - F(n) = f(c_n), \text{ avec } n < c_n < n+1.$$

On peut espérer, mais il faudra le prouver, que $u_n \sim F(n+1) - F(n)$ quand $n \to \infty$. A titre d'exemple, déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

exercice 3
On va calculer un équivalent en $+\infty$ de la suite récurrente (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{\pi}{2} \ ; \ \forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. Licence Sciences L2, M34

1. Etudier la suite (u_n). On montrera que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
2. Donner un équivalent simple de :

$$\frac{1}{(u_{n+1})^2} - \frac{1}{(u_n)^2}.$$

3. En utilisant l'exercice précédent, déterminer un équivalent de u_n.

exercice 4 (**Transformation d'Abel**)
On considère deux suites complexes (u_n) et (v_n) et la suite $(a_n = u_n v_n)$. On pose $A_{p,q} = \sum_{n=p}^{q} a_n$ si $q \geq p$ et $V_{p,n} = \sum_{i=p}^{n} v_i$ si $n \geq p$. Montrer que si $q > p$ alors :

$$A_{p,q} = \sum_{n=p}^{q-1} V_{p,n}(u_n - u_{n+1}) + u_q V_{p,q}.$$

A quoi ce résultat vous fait-il penser ?

En déduire que si la suite (u_n) est réelle, décroissante, de limite 0 et si les sommes $V_{p,n}$ sont bornées, alors la série $\sum a_n$ converge. Etudier la série de terme général $\dfrac{e^{i\theta}}{n}$ où $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

exercice 5 (**Règle de Weierstrass**)
On considère les quantités $\sum_{n\geq 1} u_n(p)$, $p \in \mathbb{N}$, $u_n(p) \in \mathbb{C}$. On suppose :

$$\forall n\ \forall p\ |u_n(p)| \leq \alpha_n \text{ avec } \sum_{n\geq 1} \alpha_n < +\infty.$$

On pose alors $S(p) = \sum_{1}^{+\infty} u_n(p)$ (a-t-on le droit de poser cela ?).
Imaginons que $\lim_{p\to\infty} u_n(p) = u_n$, question : $\lim_{p\to\infty} S(p)$ existe-t-elle ?
La réponse est oui !

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(p) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{p\to\infty} u_n(p).$$

Montrer ce résultat en « découpant » convenablement $|S(p) - S|$ où $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.