Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques[1]

Premiers exemples de raccordement (fiche 7)

Il arrive parfois, par exemple dans le cas d'un calcul de primitive ou dans la résolution d'une équation différentielle, que l'on ait trouvé deux expressions d'une solution à un problème sur deux intervalles contigus. On regarde alors ce qui se passe au point de contact pour voir par exemple si on ne peut pas *raccorder* en continuité les deux expressions.

Une primitive sur $I\!R$

Déterminer une primitive sur $I\!R$ tout entier, de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos(x)}$. On se placera sur de bons intervalles et on fera les raccords nécéssaires.

Solutions d'équations différentielles

Faisons tout d'abord quelques rappels sur les équations linéaires du premier ordre sous forme résolue. On considère l'équation différentielle

$$\gamma(t)y' + a(t)y = b(t) \tag{1}$$

où γ, a et b sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset I\!R$. On cherche alors des fonctions f définies et dérivables sur I telles que :

$$\forall t \in I \quad \gamma(t)f'(t) + a(t)f(t) = b(t).$$

On associe à l'équation (1) l'*équation homogène* :

$$\gamma(t)y' + a(t)y = 0 \tag{2}$$

L'ensemble $\{f : I \to I\!R \text{ solution de } (2)\}$ est un **sous-espace vectoriel** de l'espace vectoriel $C(I)$ de l'espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs réelles. Si l'équation (1) admet une solution h, toutes les autres solutions sont de la forme $f + h$ où f est une solution quelconque de (2). Ainsi l'ensemble des solutions sur I de (1) est soit l'ensemble vide, soit un **sous-espace affine** de $C(I)$. La difficulté de la résolution réside dans le fait que la fonction $\gamma(t)$ peut s'annuler. Dans un premier temps nous supposerons que γ est l'application constante égale à 1. Nous aborderons ensuite, par des exemples, le cas où γ s'annule.

Comment résoudre l'équation homogène ? Soit α une primitive de a sur I[2]. On remarque que f est solution de (2) si et seulement si :

$$\forall t \in I \quad f'(t)e^{\alpha(t)} + \alpha'(t)f(t)e^{\alpha(t)} = 0.$$

On en déduit que les solutions de (2) sur I sont de la forme $f(t) = Ke^{-\alpha(t)}$où K est une constante. La dimension de l'ensemble des solutions est donc 1[3].

1. Licence Sciences L2, M34
2. La continuité de a sur I permet de l'assurer.
3. On peut voir que si $(t_0, y_0) \in I \times I\!R$, il existe une solution et une seule sur I de (2) qui prend la valeur y_0 en t_0.

exercice 1 Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, l'équation

$$y' - y\tan(t) = 0.$$

Revenons à l'équation générale (1). On vérifie que pour tout $t \in I$:

$$(e^{\alpha(t)}y(t))' = e^{\alpha(t)}b(t).$$

Soit alors γ une primitive de $t \mapsto e^{\alpha(t)}b(t)$ sur I. On montre qu'il existe alors une constante K telle que :

$$\forall t \in I \quad y(t) = e^{-\alpha(t)}\gamma(t) + Ke^{-\alpha(t)}.$$

L'ensemble des solutions de (1) est un espace affine de dimension 1. Dans la pratique, on appliquera la méthode dite de la *variation de la constante* que nous décrirons.

exercice 2 Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, l'équation :

$$y' - \tan(t)y = \cos(t).$$

Regardons quelques cas instructifs d'équations différentielles linéaires avec une fonction devant la dérivée y'.

a) Cherchons les solutions sur $I\!R$ de

$$ty' - y = 0. \tag{3}$$

b) Faisons le même travail avec :

$$ty' - \frac{y}{2} = 0. \tag{4}$$

c) L'équation suivante est fort intéressante :

$$ty' - 2y = 0. \tag{5}$$

exercice 3 Résoudre sur $I\!R_+^\star$ et sur $I\!R_-^\star$ l'équation différentielle :

$$y' + \frac{t+1}{t}y = \frac{1}{t}.$$

Déterminer ensuite les solutions sur $I\!R$ de l'équation $ty' + (t+1)y = 1$.

exercice 4 Résoudre sur $I\!R$ l'équation :

$$t^2y' - y = 0.$$

exercice 5 Résoudre sur $I\!R$ l'équation :

$$ty' = 1.$$