Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques [1]

# Interpolation et Polynômes de Tchebychev [2] (fiche 6)

On définit les polynômes de Tchebychev par leurs restrictions sur $[-1,1]$ :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),\ \ x \in [-1,1]\,. \tag{1}$$

En fait il n'est pas évident à priori que $T_n$ soit un polynôme.

1. Donner les expressions de $T_0$ et $T_1$.
2. (a) Soit $x \in [-1,1]$, on pose $\theta = \arccos x$ (donc $\theta \in [0,\pi]$). Que vaut $T_n(x)$ ? Etablir ensuite une relation de récurrence entre $T_{n+1}$, $T_n$ et $T_{n-1}$.
   (b) En déduire que $T_n$ est un polynôme de degré $n$ dont le coefficient de $x^n$ est $2^{n-1}$.
   (c) Donner les expressions de $T_2$, $T_3$, $T_4$, $T_5$ et $T_6$.
3. (a) Montrer que $T_n$ a $n$ racines simples
   $$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi,\ \ k = 1, 2, \ldots, n.$$
   (b) Montrer que sur $[-1,1]$, $T_n$ atteint son minimum ou son maximum aux $n+1$ points
   $$x'_k = \cos \frac{2k}{2n}\pi,\ \ k = 0, 1, \ldots, n.$$
4. Nous arrivons à un résultat remarquable sur les polynômes de Tchebychev.

   **Théorème 1**
   On pose $\widetilde{T_n}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$. On désigne par $\widetilde{\mathcal{P}_n}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $n$ dont le coefficient de $x^n$ vaut 1. Alors, pour tout $p \in \widetilde{\mathcal{P}_n}$
   $$\max_{-1 \le x \le 1} |\widetilde{T_n}(x)| \le \max_{-1 \le x \le 1} |p(x)|.$$

   Que siginifie ce résultat ? Prouvez le ! (on pourra raisonner par l'absurde et considérer $\widetilde{T_n}(x) - p(x)$).

Soit $f$ une fonction numérique définie sur l'intervalle $[a,b]$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, $n+1$ points de ce segment. On se pose la question suivante :

> *Existe-t-il un polynôme $P$ à coefficients réels de degré $\le n$ prenant les mêmes valeurs que la fonction $f$ aux points $x_i$ pour $i = 1$ à $n$ ?*

1. Licence Sciences L2, M34
2. Pafnuty Lvovich Chebyshev est un mathématicien russe du XIX ième siècle.

1. Etudier l'application linéaire de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$ dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Répondre alors à la question posée.

On notera dans la suite, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$ par $\mathbb{R}_n[x]$. On pose pour $i = 0$ à $n$ :

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

1. Donner des propriétés des $l_i(x)$. Montrer que la famille $(l_0, \ldots, l_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. En déduire l'expression du polynôme $P$ répondant à la question posée plus haut.
3. Pour des petites valeurs de $n$ donner des exemples de polynômes $l_i$ et $P$. Tracer leurs graphes.

Un point difficile est de « mesurer »l'erreur que l'on fait quand on remplace $f(x)$ par $P(x)$. On a le résultat suivant :

**Théorème 2**
Si $f$ est $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\zeta \in ]a, b[$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta).$$

1. Montrer le théorème dans le cas $n = 1$, c'est à dire : pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\zeta \in ]a, b[$ tel que

   $$f(x) - \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)\right) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(\zeta).$$

   Si $p(t) = \dfrac{x_1 - t}{x_1 - x_0} f(x_0) + \dfrac{t - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$ et si $a \leq x \leq b$ fixé distinct de $x_0$ et $x_1$, on posera

   $$K(x) = \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)(x - x_1)}.$$

   En appliquant le théorème de Rolle plusieurs fois et en partant de la fonction

   $$W(t) = f(t) - p(t) - (t - x_0)(t - x_1)K(x),$$

   démontrer le résultat voulu.
2. Exprimer le résultat du théorème sous forme d'une majoration.

**Question finale** :

*Quel lien peut-on faire entre les polynômes de Tchebychev et le problème de l'erreur d'interpolation ?*