Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques[1]

Sur les polynômes (fiche 5)

exercice 1 ♣

Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polynôme à coefficients réels. On suppose que $0 < a_k$ pour tout $k = 0 \ldots n$. On va préciser alors la **localisation** des racines complexes de P.

1. Si on suppose que $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n$, montrer que les racines de P sont toutes de module supérieur ou égal à 1. On pourra remarquer que si z est une racine de P, $(1-z)P(z) = 0$ et on raisonnera par l'absurde en supposant $|z| < 1$.
2. On revient au cas général. On pose
$$r = \min_{0 \leq k \leq n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}}, \ R = \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}}.$$
   (a) En introduisant le polynôme $Q(x) = P(rx)$ et en utilisant le résultat précédent, montrer que $|z| \geq r$ si z est une racine de P.

   (b) En utilisant le polynôme
$$\tilde{P}(x) = x^n P(\frac{1}{x}),$$
   prouver que si z est racine de P, alors $|z| \leq R$. On fera le lien entre les racines de P et celles de $\tilde{P}$.

   (c) Conclure en énonçant le résultat prouvé.

exercice 2 ♣

Soit P un polynôme à coefficients réels admettant n racines rélles simples strictement supérieures à 1. On pose $Q(x) = (1 + x^2)P(x)P'(x) + x(P(x)^2 + P'(x)^2)$.

1. Mettre Q sous la forme $(xP + P')(xP' + P)$.
2. De quel polynôme $xP' + P$ est-il la dérivée ? En déduire que $xP' + P$ admet au moins n racines distinctes.
3. A l'aide de la fonction
$$f(x) = \exp(\frac{x^2}{2})P(x)$$
   prouver que $xP + P'$ admet au moins $n - 1$ racines distinctes. Vérifier que ces $n - 1$ racines diffèrent des précédentes.
4. Que peut-on dire alors de Q ?

[1] Licence Sciences L2, M34