Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques [1]

Comportement global (fiche 4)

Divers

exercice 1 ♣♣

a) Quel est le comportement de la suite $\sqrt{n(n+1)}-n$? Qu'en est-il de la suite $\sqrt{2n(n+1)}-n$?

b) Parmi les nombres 1, 2, $\sqrt{3}$, e^4, π^5, lesquels sont des limites de suites de nombres de la forme $\sqrt{n}-\sqrt{m}$?

exercice 2 ♣♣

Soit $a \in]0,1[$ fixé. Il s'agit de trouver toutes les applications $f : I\!R \to I\!R$ continues en 0 vérifiant :

$$\forall x \in I\!R \quad f(x) - 2f(ax) + f(a^2x) = x^2.$$

On pourra introduire l'application $g(x) = f(x) - f(ax)$.

Valeurs intermédiaires

exercice 3 ♣

Soit $I = [a,b]$ un intervalle fermé borné et f une fonction continue sur I. Si $f(I) \subset I$, l'équation $f(x) = x$ admet-elle une solution sur I ?

exercice 4 ♣

Soit $f : [a,b] \to I\!R$ un fonction continue et injective. Montrer que f est strictement monotone (**indication** : on pourra voir que si $u < v < w$ alors $f(v)$ est entre $f(u)$ et $f(w)$).

Fonctions réciproques

exercice 5 ♣

Comment justifiez-vous l'énoncé suivant ?

> *Soit $f : [a,b] \to [c,d]$ continue et bijective, alors la fonction $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ est continue.*

exercice 6 ♣♣

On considère l'application $f : I\!R \to I\!R$, $x \mapsto 32x - x^4$.

1. Montrer qu'il existe une application $g : I\!R \to I\!R$ unique telle que g soit continue sur $I\!R$, $f \circ g = f$ et pour tout $x \neq 2$, $g(x) \neq x$.

1. Licence Sciences L2, M34

2. Exprimer $g \circ g$.

Fonctions bornées

exercice 7 ♣
Soit $f \in C([a,b])$, résoudre le problème :

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_\infty.$$

Rappelons que $\|f - c\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - c|$.
(**indication** : il existe x_0, x_1 dans $[a,b]$ tels que :

$$\forall x \in [a,b] \qquad f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

puis

$$\forall x \in [a,b] \qquad f(x_0) - c \leq f(x) - c \leq f(x_1) - c$$
$$|f(x) - c| \leq \max(|f(x_0) - c|, |f(x_1) - c|) \ldots$$

Continuité uniforme

exercice 8 ♣♣
Montrer, sans évoquer un théorème célèbre, que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$. Est-elle **lipschitzienne** sur $[0,1]$?

Critère de Cauchy

exercice 9 ♣
On considère l'application $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et a un point d'accumulation de D. Montrer le résultat suivant : pour que f admette une limite en a il faut et il suffit que

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta\ \forall (x,y) \in D \times D\ (0 < |x - a| \leq \eta\ \textit{et}\ 0 < |y - a| \leq \eta) \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

(on utilisera le critère de Cauchy pour les suites dans $\mathbb{R}$)