

### Comportement local (fiche 3)

#### Utilisation d'équivalents

##### exercice 1 ♣

1. Trouver un équivalent de  $\arccos x$  quand  $x \rightarrow 1^-$ .
2. Même question pour  $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$  quand  $x \rightarrow 1^-$ .

##### exercice 2 ♣♣

- a) Montrer que l'équation  $\ln x + x = y$  admet une solution unique quelque soit  $y \in \mathbb{R}$ .
- b) Soit  $k$  un entier naturel, on note  $x_k$  l'unique solution de l'équation  $\ln x + x = k$ .  
Montrer qu'il existe trois réels  $a, b, c$  tels que, lorsque  $k$  tend vers  $\infty$ , on a :

$$x_k = ak + b \ln k + c \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right).$$

##### exercice 3 ♣

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $(u_n)$  une suite à termes strictement positifs. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^n = a \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_n - 1) = \ln(a).$$

##### exercice 4 ♣♣♣

On fixe  $u_0$  dans l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{2}]$  et on considère la suite récurrente  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ ,  $n \geq 0$ .

Il s'agit de trouver un équivalent de  $u_n$  quand  $\rightarrow \infty$ .

1. Montrer que la suite est à termes strictement positifs et qu'elle tend vers 0.
2. Déterminer un réel  $\alpha$  tel que la suite  $((u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha)$  converge vers une limite non nulle.
3. En utilisant un résultat (célèbre) vu lors d'une précédente séance de travaux dirigés, donner alors un équivalent de la suite de départ.