

Comportement local (fiche 2)

Limite, dérivation, développements limités

exercice 1 ♣

Pourriez-vous donner la définition de la limite d'une fonction (numérique et d'une variable réelle) en un point? On utilisera des *quantificateurs*.

En fait, il y a deux définitions qui ne sont pas équivalentes! On regardera la question de la limite d'une *composée* de deux fonctions.

exercice 2 ♣

Une fonction qui admet un développement limité en 0 à l'ordre 2 est-elle nécessairement deux fois dérivable en 0? On regardera le cas de la fonction $x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, convenablement prolongée en 0.

exercice 3 ♣

Donner les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions :

$$x \mapsto x^4 + x + 2 ; x \mapsto e^{x^4}(x^3 - x - 1) ; x \mapsto \ln(1 + 2x^3) ; x \mapsto x^3(1 + \tan x).$$

Equivalents

exercice 4 ♣

Donner un équivalent de $\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

exercice 5 ♣

Donner un équivalent de $x^{\sin x} - 1$ en 0^+ .

exercice 6 ♣

Donner un équivalent de $2 \ln \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$ puis quand $x \rightarrow 0^-$.

exercice 7 ♣

Donner un équivalent de $\frac{e^x - \cos x}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ quand $x \rightarrow 0$.

Remarque ♣♣ : dans les exercices ci-dessus, on pourra essayer d'aller plus loin en calculant des *développements asymptotiques*.

1. Licence Sciences L2, M34