Université de Bourgogne   U.F.R des Sciences et Techniques [1]

Un peu de calcul intégral et d'algèbre linéaire (fiche 1)

Primitives, intégration par parties ...

exercice 1 ♣
Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$x\sin(x)\ ;\ x^2e^x.$$

exercice 2 ♣

1. Soit $f:[-a,a]\to I\!R$, une fonction continue et impaire. Etablir que $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.
2. Soit $f : I\!R \to I\!R$, continue périodique de période $T > 0$, vérifier que $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

exercice 3 ♣
Soit f la fonction définie sur $[0,2]$ par :

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Etudier la fonction $x\mapsto \int_0^x f(t)dt$. Remarques ?

exercice 4 ♣
Etudier la fonction $x\mapsto \int_0^x e^{t^2}dt$. Si u est C^1 sur $I\!R$, que dire de $x\mapsto \int_0^{u(x)} e^{t^2}dt$?

exercice 5 ♣
Soit f de classe C^1 sur $[0,1]$, montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(nt)dt = 0$.

exercice 6 ♣
Etablissons une formule importante, la formule de Taylor avec reste intégral. Soit f une fonction de classe C^{k+1} sur $[a,b]$.

1. On peut déjà écrire que
$$f(x)=f(a)+\int_a^x 1\cdot f'(t)dt.$$
En faisant une intégration par parties utilisant $u(t)=-(x-t)$ (x est fixé) et $v(t)=f'(t)$ on établit que :
$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\int_a^x (x-t)f''(t)dt. \tag{1}$$

1. Licence Sciences L2, M34

2. On montre par une méthode analogue que :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t)dt. \tag{2}$$

3. Plus généralement :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!}f^{(i)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)dt. \tag{3}$$

   Ecrire cette formule dans le cas $f(x) = \exp(x)$.

4. Que se passe-t-il si on applique cette formule à un polynôme de degré $\leq k$?

exercice 7 ♣

Pour $n \in I\!N$, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

1. Etablir une relation de récurrence entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
2. Donner les expressions de $I_1(x)$, $I_2(x)$, $I_3(x)$.

exercice 8 ♣

Soit φ une application continue de $I\!R$ dans $I\!R$, on pose :

$$\Phi(x) = (1-x)\int_0^x t\varphi(t)dt - x\int_1^x (1-t)\varphi(t)dt.$$

a) Expliquer pourquoi Φ est de classe C^1 sur $I\!R$ et calculer Φ'.

b) En déduire que Φ est de classe C^2 sur $I\!R$, que $\Phi''(x) = -\varphi(x)$ et que $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$.

Rang, dimension, application linéaire...

exercice 9 ♣

1. Déterminer si $(1,1,1)$ appartient au sous-espace de $I\!R^3$ engendré par $(1,3,4)$, $(4,0,1)$, $(3,1,2)$. Justifier votre réponse.
2. Soit S et T deux sous-espace de dimension 2 de $I\!R^3$. Montrer que $\dim(S \cap T) \geq 1$.
3. Prouver qu'un système homogène de m équations en $n > m$ inconnues, a toujours une solution nontriviale (i.e autre que la solution nulle).
4. Soit l'application $f : I\!R^3 \mapsto I\!R^3$, définie par $f(x,y,z) = (x-2y, x-z, x+y+z)$. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $I\!R^3$.
   (a) Montrer que f est linéaire.
   (b) Donner la matrice de f dans la base canonique.
   (c) Calculer la matrice de f dans la base (e_2, e_3, e_1).

exercice 10 ♣

Soit V un espace vectoriel sur $I\!R$ de dimension 3. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de V et u l'endomorphisme de V défini par :

$$u(e_1) = 3e_1 - e_2 + 2e_3,\ u(e_2) = -e_1 + 3e_2 + 2e_3,\ u(e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3.$$

On va mettre en évidence une base de V dans laquelle la matrice de u a une forme particulièrement simple.

1. Donner la matrice A de u relativement à la base (e_1, e_2, e_3).
2. Vérifier que $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 16\lambda$ où I désigne la matrice identité 3×3.
3. Factoriser l'expression précédente et en déduire les valeurs de λ pour lesquelles le noyau de $\ker(u - \lambda id)$ n'est pas réduit au vecteur nul (id désigne l'application identique).
4. Déterminer le noyau de u et celui de $u - 4id$. Pour cela, on pourra se placer dans la base (e_1, e_2, e_3) et utiliser la matrice A.
5. On considère les vecteurs $f_1 = e_1 + e_2 - 2e_3$, $f_2 = -e_1 + e_2$ et $f_3 = e_1 + e_3$.
   (a) Vérifier que $u(f_1) = 0$, $u(f_2) = 4f_2$ et $u(f_3) = 4f_3$.
   (b) Justifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de V.
   (c) Donner la matrice B de u relativement à cette nouvelle base.
   (d) Ecrire la matrice de passage, P, de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (f_1, f_2, f_3).
   (e) En utilisant P, son inverse et A, retrouver la matrice B.
6. Soit k un entier naturel. Donner l'expression de A^k.

exercice 11 ♣

On considère les suites de nombres réels $(x_n)_{n\in I\!N}$, $(y_n)_{n\in I\!N}$, $(z_n)_{n\in I\!N}$ définies par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n + 6y_n - 2z_n \\ y_{n+1} &= -x_n - 2y_n + z_n \\ z_{n+1} &= -2x_n - 6y_n + 3z_n \end{cases}$$

les conditions initiales x_0, y_0, z_0 étant données dans $I\!R$. On se propose d'expliciter x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et n. Pour tout $n \in I\!N$, on note $W_n = (x_n, y_n, z_n)^T$ et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $W_n = A^n W_0$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A. Quelles sont ses valeurs propres ?
3. On considère les deux sous-espaces vectoriels $H_1 = \ker(A - I)$ et $H_2 = \ker(A - 2I)$ où I est la matice identité 3×3.
   (a) Ces deux sous-espaces sont-ils en somme directe ?

(b) Déterminer une base de H_1 et une base de H_2.

(c) Construire une base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$, formée de vecteurs de H_1 et de H_2.

4. Déduire de ce qui précède une matrice P, 3×3, inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
5. Calculer alors A^n.
6. Conclure en donnant les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et n.

exercice 12 ♣♣

Dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, on considère le sous ensemble des suites (s_n) vérifiant la relation de récurrence $s_{n+2} = s_{n+1} + s_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Vérifier que ce sous ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer qu'il est de dimension finie.
3. Déduire de ce qui précède l'expression du terme général de la suite qui vérifie à la fois la relation de récurrence et les conditions initiales $s_0 = s_1 = 1$.
4. Retrouver ce résultat, en utilisant une matrice 2×2.
5. On propose une autre méthode fondée sur la notion de *série génératrice formelle.* Analyser ce qui suit. On considère donc la suite définie par $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n \geq 2$ et $u_0 = u_1 = 1$. Posons $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$. On dit que $\phi(x)$ est la *série génératrice* de la suite (u_n). Calculons $(1-x-x^2)\phi(x)$:

$$\begin{array}{rcl}(1-x-x^2)\phi(x) & = & (1-x-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \\ & = & (1-x-x^2)(u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots) \\ & = & u_0 + (u_1 - u_0)x + (u_2 - u_1 - u_0)x^2 + (u_3 - u_2 - u_1)x^3 \cdots \\ & = & 1.\end{array}$$

Ainsi $\phi(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$. Tout revient à présent à trouver une expression de $\dfrac{1}{1-x-x^2}$ de la forme $\sum_{n=0} a_n x^n$.

Remarquons que si $\alpha \neq 0$, alors :

$$\frac{1}{\alpha - x} = \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 - \frac{x}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\alpha^{k+1}}.$$

Par ailleurs, $(1-x-x^2) = -(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)$ où :

$$\alpha_1 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \alpha_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Or, en admettant que l'expression

$$\frac{1}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}$$

est de la forme
$$\frac{A}{x-\alpha_1}+\frac{B}{x-\alpha_2},$$
on trouve :
$$\frac{1}{1-x-x^2}=-\frac{1}{(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)}=\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)}\left(\frac{1}{\alpha_1-x}-\frac{1}{\alpha_2-x}\right).$$
Ce qui nous permet de conclure à :
$$\phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)x^k.$$

Cette méthode, i.e. méthode des séries génératrices, peut être utilisée dans d'autres situations du même type, c'est à dire pour trouver l'expression du terme général d'une suite *récurrente linéaire.*

Un rappel : principe d'induction, ensemble bien ordonné

Rappelons le principe suivant :

Principe d'induction

Soit une propriété $P(n)$ (soit vraie, soit fausse) si

(I1) $P(0)$ est vraie ;

(I2) si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ vraie,

on a $P(n)$ vraie pour tout $n \in I\!N$.

Ceci repose sur : si $A \subset I\!N$, si (I1) $0 \in A$ et si (I2) pour tout $x \in A$ $x+1 \in A$, alors $A = I\!N$. Dans notre situation, on a pris $A = \{n \in I\!N, \ / \ P(n) \text{ vraie}\}$.

Proposition 0.1 $I\!N$ est bien ordonné (i.e toute partie non vide de $I\!N$ contient un plus petit élément)

Preuve 0.2 Soit $A \subset I\!N$ et $A \neq \emptyset$. Considérons l'ensemble des minorants de A : $M = \{n \in I\!N \ / \ \forall a \in A \ n \leq a\}$. On a $O \in M$ et si $a \in A$, $a+1 \notin M$, ainsi $M \neq I\!N$. Ainsi il existe $n_0 \in M$ vérifiant $n_0+1 \notin M$: c'est la négation du principe d'induction. Montrons que $n_0 \in A$. En effet, il existe a_0 dans A tel que : $n_0 \leq a_0 < n_0+1$ (négation de « n_0+1 majorant de A »), soit $a_0 = n_0$!

exercice 13 Montrer que tout partie non vide majorée de $I\!N$ posséde un plus grand élément. (considérer l'ensemble des majorants de B)

Pour terminer, donnons une variante du principe d'induction, plus souple dans la pratique.

Variante du principe d'induction

Soit une propriété $P(n)$ dépendant de l'entier n, et soit $l \in I\!N$ fixé. On suppose

(VI1) $P(l)$ est vraie ;

(VI2) (pour tout n) si $P(k)$ est vraie pour tout $k \in \{l, \dots, n\}$, $P(n+1)$ vraie,

on a alors $P(n)$ vraie pour tout $n \geq l$.

Démonstration 0.3 Soit $\{n \in I\!N \ / \ n \geq l$ et $P(n)$ faux$\}$. Il s'agit de prouver que cet ensemble est vide !
Si tel n'est pas le cas soit $n_0 = \min \{n \in I\!N \ / \ n \geq l$ et $P(n)$ faux$\}$. On a $n_0 > l$ (car $n_0 \geq l$ et $P(n_0)$ faux). Vu la minimalité de n_0, $P(k)$ est vraie pour $k = l, l+1, \dots, n_0 - 1$ d'où $P(n_0)$ est vraie ! C'est absurde !

exercice 14 Montrer qu'un carré peut être subdivisé en 6, 8, 9 carrés plus petits ? Pour quels autres entiers peut-on faire cela ?