CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune à 2 options (Mathématiques et Physique)

MATHEMATIQUES - PARTIE II

Mardi 17 mai : 10 h 15 - 12 h 15

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème, tous indépendants.

Partie I : Exercice : somme des coefficients d'une matrice orthogonale

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$, c'est-à-dire vérifiant

$$^tAA = A^tA = I_n.$$

Le but de l'exercice est d'établir une majoration de la valeur absolue de la somme S des coefficients de la matrice orthogonale A, c'est à dire du nombre

$$|S| = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right|.$$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients réels à une seule colonne et à n lignes. On définit le produit scalaire canonique sur E par :

$$\forall (X, Y) \in E^2,\ < X, Y >= {}^tXY.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, c'est-à-dire :

$$\forall X \in E,\ \|X\| = \sqrt{< X, X >}.$$

I.1. Vérifier que l'application $< \cdot, \cdot >$ est bien un produit scalaire sur E.

I.2. Démontrer que pour tout $X \in E$, on a $\|AX\| = \|X\|$.

On note U le vecteur de E dont tous les coefficients sont égaux à 1.

I.3. Démontrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $| < AU, U > | \leqslant n$.

I.4. En déduire que $|S| \leqslant n$.

I.5. Déterminer une matrice orthogonale pour laquelle $|S| = n$.

Partie II : Problème : intégrale de Poisson

Dans ce problème, on propose le calcul pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, de l'intégrale de Poisson :

$$I(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(\alpha^2 - 2\alpha \cos x + 1)\,\mathrm{d}x.$$

II.1.

II.1.a Soit $x \in [-\pi, \pi]$ fixé. Démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ t^2 - 2t \cos x + 1 > 0.$$

II.1.b En déduire que l'intégrale de Poisson est bien définie.

Cas où $\alpha \in]-1, 1[$

On suppose dans toute cette sous-section, que $\alpha \in]-1, 1[$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n}.$$

II.2. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On note ainsi f sa somme, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n}.$$

II.3.

II.3.a Calculer pour $n \geqslant 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

II.3.b En déduire avec soin que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

II.4. Exprimer la valeur de $f(0)$ à l'aide de ln (on pourra utiliser un développement en série entière de la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$).

II.5. Démontrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et écrire $f'(x)$ sous forme d'une somme de série.

II.6. Soit x un réel.

II.6.a Calculer la partie imaginaire de $Z = \dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{1 - \alpha \mathrm{e}^{ix}}$.

II.6.b Exprimer $f'(x)$ à l'aide de la partie imaginaire de Z, en déduire que :

$$f'(x) = \frac{-\alpha \sin x}{\alpha^2 - 2\alpha \cos x + 1}.$$

II.7. En déduire deux réels a et b, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a \ln(\alpha^2 - 2\alpha \cos x + 1) + b.$$

II.8. Donner alors la valeur de l'intégrale de Poisson lorsque $\alpha \in]-1, 1[$.

Cas où $|\alpha| > 1$

On suppose dans toute cette sous-section, que $|\alpha| > 1$.

II.9. Déterminer une relation entre $I(\frac{1}{\alpha})$ et $I(\alpha)$, en déduire la valeur de $I(\alpha)$ lorsque $|\alpha| > 1$.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 16 1362 – D'après documents fournis