CONCOURS NATIONAL D'ADMISSION DANS LES GRANDES ECOLES D'INGENIEURS

(Concours national DEUG)

Epreuve commune aux 3 options (Mathématiques, Physique, Chimie)

MATHEMATIQUES - PARTIE I

Mardi 17 mai : 8 h - 10 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Exercice I : étude du point fixe d'une fonction

On note f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\cos(\sqrt{x})$.

I.1. Démontrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

I.2. Déterminer la monotonie sur $[0,1]$ de la fonction ϕ définie par $\phi(x)=\cos(\sqrt{x})-x$.

I.3. Démontrer que la fonction f admet un unique point fixe a dans $[0,1]$.

I.4.

I.4.a Comparer pour $t\in[0,1]$, $\sin t$ et t (inutile de justifier).

I.4.b En déduire que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[0,1]$, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y)\in[0,1]^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant \frac{1}{2}|x-y|.$$

I.5. On note (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et pour $n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$.

I.5.a Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $|u_n-a|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-a|$.

I.5.b En déduire que la suite (u_n) converge, préciser sa limite.

Exercice II : réduction des matrices de rang 1

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n\geqslant 2$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Dans tout l'exercice M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1, on note $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace.

II.1. Exemples en petite taille

II.1.a Donner, en complétant les coefficients de la matrice suivante $\begin{pmatrix}1&2&\cdot\\2&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$,

un exemple de matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans chacun des trois cas suivants :
i) $\mathrm{rang}(A)=1$, ii) $\mathrm{rang}(A)=2$, iii) $\mathrm{rang}(A)=3$.

II.1.b La matrice $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

II.2. Existence d'un polynôme annulateur

Les colonnes d'une matrice de rang 1 sont toutes proportionnelles à une même colonne, ainsi les coefficients $m_{i,j}$ de la matrice M sont de la forme $\alpha_i\beta_j$ avec α_i et β_j des scalaires dans $\mathbb{K}$.

Déterminer deux matrices colonnes X et Y de taille n telles que $M=X^tY$. En déduire que

$$M^2=\lambda M \quad \text{avec } \lambda=\mathrm{Tr}(M).$$

II.3. La trace est valeur propre

Dans la suite du texte, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

II.3.a Démontrer à l'aide de l'égalité précédente que la matrice $M-\lambda I_n$ est non inversible.

II.3.b En déduire qu'il existe un vecteur a non nul de $\mathbb{K}^n$ tel que $u(a)=\lambda a$.

II.4. Diagonalisation de M lorsque $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.
On suppose que $\lambda = \mathrm{Tr}(M) \neq 0$.

II.4.a Démontrer que $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Vect}\,\{a\}$.

II.4.b En déduire que la matrice M est diagonalisable et préciser une matrice diagonale à laquelle elle est semblable.

II.5. Si M est de trace nulle, est-ce que M est diagonalisable ?

Exercice III : vrai-faux

Pour chaque proposition, répondre par vrai ou faux, et surtout **justifier avec précision** la réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention, toute réponse sans justification ne sera pas prise en compte.

III.1. Si $z = 1 + \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{7}}$, alors un argument de z est $\frac{\pi}{14}$.

III.2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

III.2.a La fonction f est continue en $(0,0)$.

III.2.b La fonction f admet une dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à la première variable et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

III.3. Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes. Alors la fonction $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 16 1357 – D'après documents fournis