
Devoir surveillé du 30 Novembre 2017
Les 8 exercices sont indépendants.

exercice 1

On considère une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 et telle qu'il existe $\rho \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(\rho x) = \rho f(x).$$

1. Vérifier que $f(0) = 0$.
2. Etablir que pour tout entier n non nul :

$$f(x) = \frac{1}{\rho^n} f(\rho^n x).$$

3. En déduire qu'il existe une constante réelle α tel que $f(x) = \alpha x$ pour tout réel x (on pourra commencer par le cas $|\rho| < 1$).

exercice 2

En utilisant la décroissance de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1, +\infty[$, déterminer à l'aide d'une minoration de

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ un entier N tel que cette dernière quantité soit supérieure ou égale à 10 si $n \geq N$.

exercice 3

On sait que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente. Retrouver ce résultat en utilisant la notion de suite de Cauchy, c'est-à-dire en montrant que la suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy (on commencera par écrire avec des quantificateurs qu'une suite de réels n'est pas de Cauchy).

exercice 4

On pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

1. Montrer que $A_{2n} = H_{2n} - H_n$.
2. En déduire que $A_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$. Que vaut alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{2n}$?
3. Conclure.

1. Licence Sciences L2, M34, U-Bourgogne 2017/2018

exercice 5

On considère dans \mathbb{R}^4 trois sous-espaces vectoriels F , G et H tels que $F \cap G = \{0\}$ et $(F + G) \cap H = \{0\}$. Que peut-on dire de la somme $F + G + H$? Justifier votre réponse.

exercice 6

1. Soit x et y deux matrices colonnes réelles $n \times 1$ non nulles. Quel est le rang de la matrice xy^T ? Décrire son noyau.
2. Soit x une matrice colonne réelle $n \times 1$ non nulle. La matrice xx^T est-elle diagonalisable? Justifier votre réponse.
3. Soit $E_{i,j}$ la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1. Donner l'expression de $E_{i,j}E_{h,k}$.

exercice 7

Soit A une matrice carrée complexe, on suppose qu'il existe un polynôme P dont le coefficient constant est non nul et tel que $P(A) = 0$. Montrer que A est inversible et que A^{-1} est un polynôme en A .

exercice 8

Soit M une matrice carrée complexe $n \times n$ telle que pour tout $x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ on ait (x, Ax) lié. Montrer que M est une homothétie.