Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques [1]

Devoir surveillé du 19 Octobre 2017
Les huit exercices sont indépendants.

exercice 1
Donner le développement limité de exp à l'ordre 4 en 0, puis le développement limité de exp à l'ordre 4 en 1.

exercice 2
Déterminer un équivalent de $h(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \ln\left(\frac{x^3+1}{x^3}\right)$ quand $x \to +\infty$. Calculer ensuite un développement asymptotique de $h(x)$ en $+\infty$.

exercice 3
Soit une fonction f de classe C^{n+1} sur l'intervalle $[0,1]$. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral entre 0 et $x \in [0,1]$. Démontrer cette formule dans le cas de $n = 2$.

A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, établir que pour tout n entier et pour tout $x \geq 0$:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!} \tag{1}$$

Quel résultat peut-on en déduire ?

exercice 4

1. Calculer :
$$I = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}. \tag{2}$$
2. Calculer
$$\int_0^x \sqrt{4-t^2}\,dt \tag{3}$$
pour x dans un intervalle que l'on précisera.

exercice 5

1. Quelle est la dérivée de la fonction
$$x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt?$$
Si u est C^1 sur $\mathbb{R}$, dériver la fonction
$$x \mapsto \int_0^{u(x)} e^{-t^2} dt.$$

1. Licence Sciences L2, M34, U-Bourgogne 2014/2015

2. Soit F l'application donnée par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}.$$

Pour quelles valeurs de x cette fonction est-elle définie ? En majorant l'intégrale, déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x).$$

exercice 6

On pose pour $x > 0$:

$$I(x) = \int_1^x \ln(t) dt. \tag{4}$$

1. Calculer $I(x)$ et déterminer les limites en $+\infty$ et 0^+ de $I(x)$.
2. Pour k entier ≥ 1 comparer $\displaystyle\int_k^{k+1} \ln(t) dt$ avec $\ln(k)$ et $\ln(k+1)$. En déduire une majoration de $\ln(n!)$ à l'aide de $I(n)$ et $I(n+1)$. Prouver alors que :

$$\ln(n!) \sim_{n \to +\infty} n \ln(n). \tag{5}$$

exercice 7

Soit A une matrice complexe $n \times n$ à diagonale strictement dominante (sur chaque ligne, le module du coefficient qui est sur la diagonale est strictement supérieur à la somme des modules des autres coefficients de la ligne). Montrer que A est inversible.

En déduire que que si λ est une valeur propre de la matrice complexe $n \times n$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, il existe un indice i tel que λ soit dans le disque (fermé) de centre b_{ii} et de rayon $\displaystyle\sum_{j=1, j \neq i}^{n} |b_{ij}|$.

exercice 8

Soit A une matrice complexe $n \times n$ telle que $A^2 = I$, I étant la matrice identité $n \times n$.

1. A est-elle inversible ?
2. Déterminer les constantes a et b telles que $a(x-1) + b(x+1) = 1$. Montrer que A est diagonalisable.