Devoir 5 (exercices à rédiger) à rendre le Mercredi 13 Décembre 2017

exercice 1

Soit n un entier naturel ≥ 1, on considère le fonction $f_n(x) = x^n e^x - 1$.

1. En étudiant f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$, montrer que l'équation $x^n e^x = 1$ admet une et une seule solution positive. On note cette solution α_n.
2. Vérifier que $\alpha_n < 1$. Calculer, puis déterminer le signe, de $f_n(\alpha_{n+1})$. En déduire que la suite (α_n) est strictement croissante, puis convergente. Montrer que cette limite est 1. (Remarquer que $\alpha_n = \exp\left(-\dfrac{\alpha_n}{n}\right)$.)
3. On a donc $\alpha_n = 1 + o(1)$. Montrer que si l'on reporte cette égalité dans $\alpha_n = \exp\left(-\dfrac{\alpha_n}{n}\right)$, alors :
$$\alpha_n = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
En déduire que :
$$\alpha_n = 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

exercice 2

Soit k un entier supérieur ou égal à 2, on considère le **reste** :
$$R_N = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^k}. \tag{1}$$
On veut étudier le comportement de R_N quand $N \to +\infty$. Dans la suite p désigne un entier naturel.

1. Si $\alpha > 0$ donner un **développement asymptotique** de $\dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ jusqu'à l'ordre $O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.
2. Pour tout entier r, $0 \leq r \leq p+1$, on considère :
$$P_r(x) = (x+1)^{k+p}x^r - x^{k+p}(x+1)^r. \tag{2}$$
Montrer que $(1, x, \ldots, x^{k+p-2}, P_0(x), P_1(x), \ldots, P_{p+1}(x))$ est une base de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $k+2p$. En déduire l'existence et l'unicité de la décomposition :
$$(x+1)^{k+p}x^p = \sum_{i=0}^{p+1} \lambda_i P_i(x) + \sum_{j=0}^{k+p-2} \mu_j x^j \tag{3}$$
où les λ_i et les μ_j sont des réels.

1. Licence Sciences L2, M34, U-Bourgogne 2017/2018

3. Montrer que l'on a un développement du type :

$$\frac{1}{n^k} = \sum_{i=-1}^{p} \nu_i \left[\frac{1}{n^{k+i}} - \frac{1}{(n+1)^{k+i}} \right] + O\left(\frac{1}{n^{k+p+2}}\right),\ n \to +\infty. \tag{4}$$

   En déduire que :

$$R_N = \frac{\nu_{-1}}{N^{k-1}} + \frac{\nu_0}{N^k} + \cdots + \frac{\nu_p}{N^{k+p}} + O\left(\frac{1}{n^{k+p+1}}\right),\ N \to +\infty. \tag{5}$$

4. Si $k = 2$, donner le développement de R_N jusqu'à l'ordre $O\left(\frac{1}{N^4}\right)$.