Devoir 4 (exercices à rédiger) à rendre le Jeudi 23 Novembre 2017

exercice 1
On considère la série :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \qquad (\alpha > 0)$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série converge.

exercice 2
On calcule ici la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

1. Soit $n \in I\!N$, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on ait :

   $$P_n(\frac{1}{\tan^2 t}) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1} t}.$$

   On pourra utiliser la formule de Moivre, puis celle du binôme.
2. Quel est le lien entre les coefficients d'un polynôme et la somme de ses racines complexes comptées selon leur ordre de multiplicité ? Expliciter les racines de P_n et calculer leur somme.
3. Vérifier que $\sin t \leq t \leq \tan t$ si $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. En déduire que

   $$\frac{1}{\tan^2 t} \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2 t} \text{ si } 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

4. En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2}$.
5. Conclure en donnant la valeur $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

exercice 3
On considère une suite (u_n) à termes positifs non tous nuls et telle que la série $\sum u_n^2$ converge. On définit la suite (v_n) en posant pour $n \geq 1$:

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. Licence Sciences L2, M34, U-Bourgogne 2017/2018

1. Montrer que $v_n^2 - 2u_n v_n \leq (n-1)v_{n-1}^2 - nv_n^2$. En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{N} v_n^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{N} u_n v_n.$$

2. Etablir que $\sum v_n^2 < +\infty$ et que :

$$\sum_{n\geq 1} v_n^2 \leq 4 \sum_{n\geq 1} u_n^2.$$

   On peut prouver que dans l'inégalité ci-dessus la constante 4 est la **meilleure possible**. Essayer de le faire !