Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques[1]

Devoir 3 (exercices à rédiger) à rendre le Jeudi 26 Octobre 2017

exercice 1

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice $P \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ inversible telle $P^{-1}AP$ soit diagonale. Pour cela, on cherchera toutes les valeurs $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $\det(A-\lambda I) = 0$, puis on déterminera les sous-espaces $\ker(A-\lambda I)$ pour ces différentes valeurs de λ. On s'assurera que ces sous-espaces sont en somme directe.
2. Déterminer la matrice $M = a_1 I + a_2 A + a_3 A^2 + a_4 A^3$.
3. Montrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ inversible telle $Q^{-1}MQ$ soit diagonale.

exercice 2

On considère la suite (a_n) définie par :

$$a_0 \in \mathbb{R}_+^\star, \ a_{n+1} = \ln(1+a_n).$$

On pose $f(t) = \ln(1+t)$ $(t \in \mathbb{R}^+)$.

a) Vérifier que f est croissante, continue et que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^\star \ f(t) < t.$$

En déduire que la suite (a_n) est positive, décroissante, minorée. En déduire qu'elle converge vers une limite que l'on déterminera.

b) Etablir que $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$. On pose

$$b_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}.$$

i) Montrer que :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2}.$$

En déduire que $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$.

1. Licence Sciences L2, M34, U-Bourgogne 2017/2018

ii) En appliquant un résultat vu en travaux dirigés, prouver que

$$a_n \sim \frac{2}{n}.$$

exercice 3

On se place sur $\mathbb{C}^{n\times n}$. On sait que la trace [2] est une forme linéaire sur $\mathbb{C}^{n\times n}$: on la note t . On désigne par $E_{i,j}$ la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf l'élément de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne qui vaut 1.

1. Calculer $E_{i,j}E_{h,k}$.
2. Montrer que $t(AB) = t(BA)$ pour toutes matrices A et B. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
3. Soit ν une forme linéaire sur $\mathbb{C}^{n\times n}$ telle que $\nu(AB) = \nu(BA)$ quelles que soient les matrices A et B.
   (a) Montrer que $\nu(E_{i,j}) = 0$ si $i \neq j$ et $\nu(E_{i,i}) = \nu(E_{j,j})$.
   (b) En déduire que ν est de la forme λt avec λ complexe.

2. La trace d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux.