

Devoir 2 (exercices à rédiger) à rendre le Jeudi 5 Octobre

exercice 1

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, +\infty[$. On suppose que $|f|$ et $|f''|$ sont majorées respectivement par M_0 et M_2 sur $[a, +\infty[$. Montrer que $|f'|$ est majorée sur $[a, +\infty[$ par une quantité que l'on déterminera.

exercice 2

Soit g une fonction à valeurs réelles continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables, telles que :

$$f(0) = f(1) = 0 \text{ et } f'' = g.$$

exercice 3

Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

exercice 4

Soit f une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} et $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Indication 1 Dans chacun des exercices ci-dessus, on pourra utiliser, après l'avoir énoncée correctement, une formule de Taylor. Pour rappel, on dispose de la formule de Taylor-Lagrange, de la formule de Taylor-Maclaurin et de la formule de Taylor avec reste intégral. Les exercices 2 et 3, par exemple, font appel à la formule de Taylor avec reste intégral.

exercice 5

Pour tout entier naturel n on considère :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} dx. \tag{1}$$

Expliquer pourquoi cette expression a un sens. Calculer alors sa valeur pour tout entier n .

Indication 2 Penser à la notion de *prolongement par continuité*.

1. Licence Sciences L2, M34, U-Bourgogne 2017/2018