CONCOURS NATIONAL DEUG

Epreuve commune concours Physique et concours Chimie

MATHEMATIQUES

PARTIE I

Durée : 2 heures

*Les calculatrices sont **autorisées**.*

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Les trois exercices sont **indépendants.**

Exercice 1 Etude d'une suite récurrente

On note I l'intervalle $\left]0;\frac{1}{\sqrt{6}}\right[$. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$ et $u_1 = \frac{1}{10}$.

On note f la fonction définie sur I par $f(x) = x - 2x^3$.

1. *Etude de la convergence*

a. Déterminer les variations de f sur I puis comparer $f(I)$ et I.

b. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. *Théorème de Cesàro*

Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel non nul n, qui converge vers un réel l.

On définit alors la suite (M_n) pour tout entier naturel non nul n, par $M_n = \frac{1}{n}(v_1 + v_2 + ... + v_n)$.

M_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite (v_n).

a. Traduire à l'aide de quantificateurs le fait que la suite (v_n) converge vers l.

b. Soit n un entier naturel non nul, et p un entier tel que $1 \le p \le n$. Montrer que $|M_n - l| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}|v_k - l| + \max_{p<k\le n}|v_k - l|$.

c. Conclure avec soin que si la suite (v_n) converge vers l, alors (M_n) converge aussi vers l (ce résultat porte le nom de théorème de Cesàro).

3. *Application à la recherche d'un équivalent de* (u_n)

a. Déterminer la limite de $\frac{1}{(x-2x^3)^2} - \frac{1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

En déduire la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$.

b. Utiliser tous les résultats précédents pour donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ de la suite (u_n) (on pourra simplifier $\sum_{k=1}^{n} v_k$).

<u>Exercice 2</u> **Etude d'un endomorphisme sur l'espace des polynômes**

n désigne un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n.
On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$, l'application f : $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ par :
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P(X)) = X(P(X) - P(X-1))$.

4. *Résultats préliminaires*

a. Calculer $f(1), f(X), f(X^2)$.

b. Si $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$, avec $a_n \ne 0$, quel est le terme de plus haut degré du polynôme $P(X-1)$?

c. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(X) = P(X-1)$. On pose $Q(X) = P(X) - P(0)$. Montrer que $Q(X)$ est un polynôme constant que l'on précisera.

5. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Déterminer le noyau de f, en déduire la dimension de l'image de f.

7. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $n = 2$.

a. Quelle est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? Ecrire la matrice de l'endomorphisme f dans cette base canonique.

b. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

8. *Etude de la diagonalisation dans le cas général*

Pour tout entier naturel k, on définit les polynômes P_k par :
$P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et pour tout $k \ge 2$, $P_k(X) = X(1-X)(2-X)...(k-1-X)$.

a. Montrer que la famille $(P_0, P_1, P_2, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Soit k un entier naturel, déterminer un nombre réel c_k tel que $f\left(P_k\right) = c_k P_k$.

c. Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

<u>Exercice 3</u> Résolution d'une équation différentielle

9. On note (E) l'équation différentielle $|x|\,y' + (x-1)y = x^2$.

a. Résoudre (E) sur $]0;+\infty[$.

b. Sachant que les solutions de (E) sur $]-\infty;0[$ sont les fonctions $x \mapsto x + 2 + \dfrac{2}{x} + B\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$, où $B \in \mathbb{R}$, existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$? Si oui, les expliciter.

Fin de l'énoncé