Université de Bourgogne   U.F.R des Sciences et Techniques [1]

Question de cours susceptibles d'être posées à l'examen de Janvier 2018.

On précise ci-dessous ce que l'on attend :

1. énoncer clairement le résultat (hypothèses et conclusions).
2. preuve ou tout du moins un idée de la preuve (un dessin par exemple).
3. un exemple d'utilisation.

---

1. **Théorème de Ptolémée-Regiomontanus.**
   (a) **Théorème 1**
   $$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \tag{1}$$
   $$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{2}$$
   (b) dessin
   (c)
   $$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1. \tag{3}$$
2. **Exponentielle complexe**
   (a) Si $x \in I\!R$, on a $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Si $c = re^{i\varphi}$ et $w = se^{i\theta}$ alors
   $$cw = rse^{i(\varphi+\theta)}. \tag{4}$$
   (b) preuve :
   $$\begin{aligned} e^{i\varphi}e^{i\theta} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\theta + i\sin\theta) && (5)\\ &= (\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) + i(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta) && (6)\\ &= e^{i(\varphi+\theta)}. && (7)\end{aligned}$$
   (c) Calcul de $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{14}$ (réponse : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2i\frac{\pi}{3}}$).
3. **Racines carrées d'un nombre complexe.**
   (a) Soit Z un nombre complexe non nul, il existe deux nombres complexes distincts z tels que $z^2 = Z$. En effet si $Z = Re^{i\theta}$ ($R > 0$ et $\theta \in I\!R$), $z = re^{i\varphi}$ ($r > 0$ et $\varphi \in I\!R$), $z^2 = Z$ si et seulement si $r^2 = R$ et $2\varphi = \theta$ modulo 2π.

1. Licence Sciences L1, MaIE1A

(b) autre preuve (en passant par la forme cartésienne) : si $Z = \alpha + i\beta$, alors $z = a + ib$ est racine carrée de Z si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & \alpha \\ 2ab & = & \beta \end{array} \right.$$

On peut ajouter la condition sur les modules : $a^2 + b^2 = |z|^2 = |Z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. On a donc les système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & \alpha \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ 2ab & = & \beta \end{array} \right. \tag{8}$$

(c) les racines carrées de $-7 + 24i$ sont $3 + 4i$ et $-3 - 4i$.

4. **Interpolation linéaire**

(a) Si (x_0, y_0) et (x_1, y_1) sont deux points de $I\!R^2$ ($x_0 < x_1$), l'équation de la droite passant par ces deux points se déduit de

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}. \tag{9}$$

(b) preuve : dessin et notion de pente.

(c) étude du cas $y = x^2$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$. Calcul de l'aire sous la courbe au dessus de $[x_0, x_1]$. Comparer cette aire à celle du trapèze sous le segment d'interpolation et au dessus de $[x_0, x_1]$.

5. **Continuité et opérations algébriques.**

(a) **Théorème 2**
Si f et g sont deux fonctions définies sur l'intervalle I, continues en $x_0 \in I$ et soit $\lambda \in I\!R$ alors les fonctions

$$x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x),\ x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$$x \mapsto (fg)(x) = f(x)g(x),\ x \mapsto (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (si } g(x_0) \neq 0)$$

sont aussi continues en x_0.

(b) preuve : non exigible.

(c) On en déduit que les **fonctions polynomiales** sont continues en tout point de (l'intervalle) $I\!R$ puis que toute **fraction rationnelle**, c'est-à-dire un quotient de deux fonctions polynomiales, est continue en tout point de son domaine de définition.

6. **Théorème des valeurs intermédiaires.**

(a) **Théorème 3**
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et c une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. Il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = c$.

On retiendra que **l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle**.

(b) preuve : non exigible

(c) localisation des racines réelles du polynôme $x^3 - x^2 - 3x$.

7. **Fonction réciproque d'une fonction continue**

(a) **Théorème 4**
Soit $f : [a,b] \to [c,d]$, une fonction continue et bijective (donc strictement monotone), alors la fonction réciproque $f^{-1} : B \to A$ est aussi continue.

(b) dessin

(c) Ce résultat permet de conclure quant à la continuité des fonctions trigonométriques inverses, de $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, etc.

8. **Théorème des accroissements finis**

(a) **Théorème 5** Si f est une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ $(a < b)$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

(b) idée de la preuve par un dessin et passage par le théorème de Rolle.

(c) si f et g sont deux fonctions numériques continues sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ $(a < b)$, dérivables sur l'intervalle ouvert $]a,b[$:

i. Si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$, alors f est une fonction constante.

ii. Si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = g'(x)$ alors f et g sont égales à une constante près.

iii. Si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0$, f est strictement croissante.

iv. S'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in]a,b[,\ |f'(x)| \leq M$, alors

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|,\ \forall (x_1, x_2) \in [a,b] \times [a,b].$$

9. **Congruences**

(a) **Théorème 6** Si $a \equiv b \pmod{n}$, si $c \equiv d \pmod{n}$ et si k est un entier naturel, alors :

$$a + c \equiv b + d \pmod{n},\ ac \equiv bd \pmod{n},\ a^k \equiv b^k \pmod{n}. \tag{10}$$

(b) preuve

(c) Calcul par exemple de 7^{33} modulo 5.

10. **Identité de Bézout**

(a) **Théorème 7** Soit a et b deux entiers, il existe un couple $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, non nécessairement unique, tel que :

$$au + bv = \gcd(a,b). \tag{11}$$

(b) idée de la preuve : remontée dans l'algorithme d'Euclide.

(c) Touver u et v entiers tels que $25u + 33v = 1$.