
Université de Bourgogne
Licence Sciences L1, semestre 1, filière Electronique-Informatique, année 2017/2018

Partiel du 8 Novembre 2017 (durée : 2h).

Les documents et les calculatrices (et tout objet électronique) ne sont pas autorisés. Les différentes parties sont indépendantes.

Partie 1

1. Déterminer l'entier naturel n tel que la somme des entiers consécutifs de 1 à n soit 5050.
2. Quel est l'entier naturel k tel que $\sum_{j=0}^k 2^j = 1023$? Justifier votre réponse.
3. Soit p et q deux nombres réels, exprimer $\sin p + \sin q$ comme un produit de sinus et de cosinus.
4. Si $x \in]-\pi, \pi[$, donner les expressions de $\cos x$ et de $\sin x$ à l'aide de $\tan \frac{x}{2}$. Ecrire ensuite une paramétrisation du cercle trigonométrique (moins un point) ne faisant intervenir que des fractions rationnelles.
5. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout réel x strictement positif,
$$C = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}.$$

Partie 2

1. Mettre sous la forme $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) les nombres :

$$\frac{2-i}{5+2i} \quad ; \quad \frac{4+5i}{1-2i} + \frac{4-5i}{1+2i}.$$

2. Quelle est la forme algébrique du nombre complexe de module 6 et d'argument $\pi/6$?
3. Calculer $(1+i)^{10}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin x$ à l'aide de e^{ix} et e^{-ix} , puis linéariser $\sin^3 x (= (\sin x)^3)$.
5. (a) Déterminer, sous forme trigonométrique, les racines de $z^3 = 1$ puis celles de $z^3 = \frac{1}{27}$.
(b) Déterminer les racines carrées de $15 - 8i$.
(c) Résoudre l'équation $z^2 - 2iz - 16 + 8i = 0$.

Partie 3

1. Quel est le lieu des complexes (ou des points d'affixes ces complexes) z tels que $|z - 2| = |z + 2|$? Justifier votre réponse.
2. Quel est le lieu des complexes (ou des points d'affixes ces complexes) z tels que $|z - 2| = 2|z + 2|$? Justifier votre réponse.

Partie 4

1. (a) Tracer le graphe de la fonction f définie sur $[-2, 2]$:

$$x \mapsto \begin{cases} 1 - x & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ 2x + 3 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

- (b) Quelle est l'image de -1 par f ? Quels sont les antécédents de $\frac{5}{2}$ par f ?
 - (c) La fonction f est-elle continue en -1 ? La fonction f est-elle continue en 0 ? Justifier vos réponses.
2. On pose $g(x) = 3x - 2$, $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, déterminer $g \circ h$ et $h \circ g$.
 3. Les ensembles suivants sont-ils des graphes de fonctions? Si oui, donner l'expression de la fonction correspondante.

$$G_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = -3\}, \quad G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y \leq 0\}.$$

4. Expliquer pourquoi $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.