Fonctions numériques : continuité, limites, dérivation, fonctions classiques

H. Le Ferrand

25 novembre 2017

FIGURE 1 – Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646 (Leipzig)- 1716 (Hanovre)

Table des matières

1 Introduction. Prérequis

1.1 La notion de fonction d'une variable réelle

Le terme *functio* a été proposé par Leibniz et la notation $y = f(x)$ a été introduite par Euler en 1734. En 1837 Dirichlet donne la définition suivante : une fonction $f : A \to B$ est la donnée de deux ensembles A (le **domaine**) et B (l'**image**) et d'un procédé qui à tout $x \in A$ associe un (et un seul) $y \in B$. On écrit :

$$y = f(x) \text{ ou } x \mapsto f(x).$$

On dit que y est **l'image** de x et que x est **un antécédent** de y. Regardons les exemples suivants :

$$f : [-1, 1] \to I\!R,\ f(x) = x \tag{1}$$

$$g : [0, 1] \to I\!R,\ g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{2}$$

$$h : [-1, 1] \to I\!R,\ h(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases} \tag{3}$$

$$l : [0, 1] \to I\!R,\ l(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x est rationnel} \\ 0 & \text{si x est irrationnel} \end{cases} \tag{4}$$

En général, on indique seulement le procédé $x \mapsto f(x)$, il s'agit alors déterminer le domaine de définition de f que l'on note $\mathcal{D}_f$. On travaillera (essentiellement) sur des intervalles (ou des unions d'intervalles) de $I\!R$: $[a, b] = \{x \in I\!R \ /\ a \leq x \leq b\}$ (**segment**), $]a, b[= \{x \in I\!R \ /\ a < x < b\}$ (**intervalle ouvert borné**), $[a, +\infty[= \{x \in I\!R \ /\ a \leq x\}$, etc. Par exemple, on a :

$$f(x) = \frac{1}{x - 1},\ \mathcal{D}_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[. \tag{5}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x}},\ \mathcal{D}_f =]-\infty, 4[. \tag{6}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}},\ \mathcal{D}_f = ? \tag{7}$$

1.2 Graphe. Image directe et image réciproque

Soit $f : I\!R \to I\!R$ une fonction de domaine $\mathcal{D}_f$ (qui sera un intervalle ou une union d'intervalles). **La courbe représentative** de f, encore appelée **graphe de** f, est le sous-ensemble de $I\!R^2$ formé par les points de coordonnées $(x, f(x))$, x parcourant $\mathcal{D}_f$. En général, on ne pourra tracer qu'une partie de la courbe de f.

On aurait pu définir une fonction par son graphe : un graphe Γ est un sous-ensemble de $I\!R^2$ tel que pour tout $x \in I\!R$, il existe au plus un $y \in I\!R$ tel que $(x, y) \in \Gamma$. Ce réel, s'il existe, est appelé l'image de x par f et est noté $f(x)$.

Remarquons que le cercle trigonométrique n'est pas le graphe d'une fonction. Par contre le premier quart de cercle l'est !

Si A est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{D}_f$, **l'image directe** de A est l'ensemble des images des points de A. Cet ensemble est noté $f(A)$.

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\}\,. \tag{8}$$

Si B est un sous-ensemble de $I\!R$, **l'image réciproque** de B est l'ensemble des antécédents des points de B. Cet ensemble est noté $f^{-1}(B)$.

$$f^{-1}(B) = \{x \in A\ / f(x) \in B\}\,. \tag{9}$$

Si $f(x) = |x|$, on a :

$$f(]-2,1[) = [0,2[,\ f^{-1}([1,2]) = [-2,-1] \cup [1,2]. \tag{10}$$

Si $f(x) = \sin x$, on a :

$$f([0,\frac{3\pi}{4}]) = [0,1],\ f^{-1}([\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]) \cap [0,\frac{\pi}{2}] = [\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]. \tag{11}$$

1.3 Monotonie. Fonction majorée

Soit f une fonction de domaine (de définition) $\mathcal{D}_f$ et I un intervalle contenu dans $\mathcal{D}_f$. On dit que f est :

— constante sur I si : $\forall (x,y) \in I \times I = I^2,\ f(x) = f(y)$.
— croissante sur I si : $\forall (x,y) \in I^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
— strictement croissante sur I si : $\forall (x,y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
— monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.
— majorée sur I si : $\exists M \in I\!R,\ \forall x \in I,\ f(x) \leq M$.

Par exemple la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0,+\infty[$, décroissante sur $]-\infty,0]$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est majorée sur $[\frac{1}{10},1]$ mais ne l'est pas sur $]0,1]$.

1.4 Symétrie. Périodicité

Pour simplifier l'étude d'une fonction sur sur domaine, on regardera si elle possède des propriétés de symétrie ou de périodicité. Par exemple la fonction $f : x \mapsto f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ est définie sur $I\!R$ et est **impaire** sur cet intervalle (symétrique par rapport à 0), c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$. Il suffira alors de l'étudier sur l'intervalle $[0,+\infty[$: son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

On pourra voir aussi que si une fonction g vérifie $g(a-x) = g(x)$ pour tout x sur un bon intervalle (si x est dans l'intervalle, $a-x$ doit aussi s'y trouver), a étant une constante fixée, le graphe de g est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = \frac{a}{2}$.

Pour la notion de période, on pensera bien évidemment aux fonctions circulaires. Construisons le graphe de la fonction h définie sur $I\!R$ de période 2 telle que $h(x) = x^2$ sur $[-2,2]$.

1.5 Composée

A l'aide de fonctions connues, on peut construire de nouvelles fonctions en les composant :

$$g \circ f(x) := g(f(x)). \tag{12}$$

La composée $g \circ f$ se lit « g rond f ». La composée a un sens si à la fois $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g$. Traitons les exemples suivants :

1. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, $g \circ f$? $f \circ g$?
2. $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 + x$, $g \circ f$? $f \circ g$?
3. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 1$, $g \circ f$? $f \circ g$?
4. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 1$, $g \circ f$? $f \circ g$?
5. $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, $g \circ f$? $f \circ g$?

Dans le cas du dernier exemple, on a déterminé pour f une fonction g que l'on va appeler **la fonction réciproque de** f et que l'on note $g = f^{-1}$:

$$\forall x \in I\!R,\ \forall y \in I\!R,\ y = f(x) = 3x - 2 \iff x = f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}. \tag{13}$$

1.6 Interpolation linéaire

Si (x_0, y_0) et (x_1, y_1) sont deux points de $I\!R^2$ $(x_0 < x_1)$, on cherche l'équation de la droite passant par ces deux points. On utilise la notion de **pente** d'une droite, soit :

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}. \tag{14}$$

A titre d'exemple, étudions le cas $y = x^2$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$. Calculons l'aire sous la courbe au dessus de $[x_0, x_1]$. Comparons cette aire à celle du trapèze sous le segment d'interpolation et au dessus de $[x_0, x_1]$.

2 Continuité. Limites

2.1 Continuité en un point

On considère une fonction f définie (au moins) sur un intervalle I et x_0 un point de I (on peut supposer pour l'instant que x_0 n'est pas une extrimité de I). On dira (Weierstrass 1874) que f est **continue en** x_0 si :

> *La quantité $|f(x) - f(x_0)|$ peut être rendue aussi petite que l'on veut si $|x - x_0|$ est suffisamment petite.*

Avec des quantificateurs, cela s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

FIGURE 2 – Augustin Louis, baron Cauchy, 1789 (Paris) - 1857 (Sceaux)

Le nombre δ dépend de x_0, on pourrait le noter δ_{x_0}.

Regarder si f est continue en x_0, revient à étudier les images réciproques d'intervalles de la forme $]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$. Examinons différents exemples dont :

$$x \mapsto 1 \ ; \ x \mapsto x^2 \ ; \ x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 2x - \frac{1}{2} & \text{si } 1 \le x \end{cases} \ ; \ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \end{cases} \ ; \ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2.1
Si f et g sont deux fonctions définies sur l'intervalle I, continues en $x_0 \in I$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors les fonctions

$$x \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x), \ x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$$x \mapsto (fg)(x) = f(x)g(x), \ x \mapsto (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (si } g(x_0) \neq 0)$$

sont aussi continues en x_0.

On en déduit que les **fonctions polynomiales** sont continues en tout point de (l'intervalle) $\mathbb{R}$ puis que toute **fraction rationnelle**, c'est-à-dire un quotient de deux fonctions polynomiales, est continue en tout point de son domaine de définition.

On retiendra aussi que les fonctions trigonométriques cos, sin sont continues en tout point de $\mathbb{R}$ et donc que la fonctiontan est continue en tout point x_0 tel que $\cos x_0 \neq 0$.

Concernant la composition des fonctions, on a :

Théorème 2.2
Si $f : [a,b] \to [c,d]$ est continue en x_0 et si $g : [c,d] \to [e,f]$ est continue en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Ce résultat permettra donc de construire, partant de fonctions continues, de nouvelles fonctions continues. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est continue sur $I\!R$.

2.2 Valeurs intermédiaires. Maximum

Si f est une fonction définie sur un intervalle I, on dit que f est continue (sur I) si elle est continue en tout point de I. Si la notion de continuité en un point est une notion locale, on a cependant deux résultats fondamentaux pour une fonction continue sur un intervalle.

Théorème 2.3
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et c une valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. Il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = c$.

C'est le théorème des **valeurs intermédiaires**.

On retiendra que **l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle**.
A titre d'exemple, localisons les racines réelles du polynôme $x^3 - x^2 - 3x$.

Enonçons le **théorème du maximum** :

Théorème 2.4 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, elle est bornée sur $[a,b]$ et elle atteint son minimum et son maximum, c'est-à-dire il existe $u \in [a,b]$ et $U \in [a,b]$ tels que $\forall x \in [a,b]$, $f(u) \leq f(x) \leq f(U)$.

On retiendra que **l'image d'un segment par une fonction continue est un segment**.

2.3 Fonction réciproque

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I, elle est **injective**, c'est-à-dire si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$ (cela revient à dire que si l'équation $y = f(x)$ $(x \in I)$ a une solution, celle-ci est unique).

Par contre si une fonction est injective sur I, elle n'est pas nécessairement strictement monotone. Mais on a :

Théorème 2.5
Si f est continue et injective sur l'intervalle I, elle est strictement monotone.

On peut alors aborder la question de la **bijectivité**. Si $f : A \to B$ est bijective, on a par définition :

$$\forall y \in B,\ \text{l'équation } y = f(x),\ x \in A,\ \text{admet une solution et une seule.}$$

Cette unique solution est notée $x = f^{-1}(x)$ et f^{-1} est appelée la **fonction réciproque de** f.

Théorème 2.6
Soit $f : [a, b] \to [c, d]$, une fonction continue et bijective (donc strictement monotone), alors la fonction réciproque $f^{-1} : B \to A$ est aussi continue.

Ce résultat permet de conclure quant à la continuité des fonctions trigonométriques inverses, de $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, etc.

2.4 Limites

2.4.1 Limite en un point

Soit $x_0 \in I\!R$ et $\alpha > 0$. On considère I un intervalle de la forme $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, $]x_0, x_0+\alpha[$ ou $]x_0-\alpha, x_0[$ et f une fonction définie sur I sauf éventuellement en x_0. En fait seules les valeurs $f(x)$ pour $x \neq x_0$ vont nous intéresser.

On dira que f **a pour limite** $l \in I\!R$ **quand** x **tend vers** x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \ : \ 0 < |x - x_0| \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{15}$$

On écrit alors : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Soit la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Cette fonction n'est pas continue en 0 mais $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Soit g la fonction donnée par :

$$g(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + x}. \tag{16}$$

Elle n'est pas définie en 0 mais on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2}{x + 1} = 2 \tag{17}$$

car la dernière fonction est continue en 0. En effet **dire qu'une fonction** f **est continue en** x_0 **signifie que** $\lim_{x \to x_0} f(x)$ **existe et vaut** $f(x_0)$.

Soit h la fonction définie pour $x \neq 0$ par :

$$h(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}. \tag{18}$$

Cette fonction est le produit d'une fonction qui tend vers 0 quand $x \to 0$ ($x \to x^3$) par une fonction bornée au voisinage de 0 ($x \to \sin \frac{1}{x}$). On a donc :

$$|h(x)| \leq |x|^3, \ x \neq 0. \tag{19}$$

On peut alors affirmer que $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$.

2.4.2 Calculs pratiques

Si f est continue en x_0 alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. C'est le cas des fonctions

— polynomiales (sur $\mathbb{R}$),
— des fractions rationnelles (sur leur ensemble de définition),
— des fonctions circulaires (sur leur ensemble de définition),
— des fonctions circulaires réciproques (sur leur ensemble de définition),
— de $x \mapsto \sqrt{x}$ ($x \geq 0$), de $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ (réciproque de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$).

On pourra alors utiliser les résultats sur la somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues. Pour les limites (cadre général), les résultats sur la somme, le produit et le quotient demeurent. Pour la composée, on veillera dans le cas de $x \mapsto g \circ f(x)$ à avoir une hypothèse de continuité sur la fonction g.

On utilisera aussi la propriété suivante : si une fonction est le produit d'une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers x_0 par une fonction bornée au voisinage de x_0 alors la fonction tend vers 0 quand $x \to x_0$.

On doit aussi savoir que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{20}$$

La première limite est obtenu en encadrant, sur le cercle trigonométrique, l'aire du secteur circulaire d'angle x par les aires de deux triangles rectangles :

$$\frac{\sin x \cos x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \tan x.$$

Pour $x > 0$, $\ln x$ est l'aire (algébrique) sous la courbe $x \to \frac{1}{x}$ au dessus du segment $[1, x]$. Fonction strictement croissante et continue sur $]0, +\infty[$, elle réalise une bijection bicontinue de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. La fonction réciproque est la fonction exp. On doit savoir que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1, \ \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1. \tag{21}$$

Dans la pratique, on n'hésitera pas à **transformer** les expressions dont on cherche la limite. Par exemple :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 4x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 5x + 3}{x + 1} \tag{22}$$

$$= \frac{9}{2}. \tag{23}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{4 + x - 4}{x(\sqrt{4+x} + 2)} \tag{24}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+x} + 2} \tag{25}$$

$$= \frac{1}{4}. \tag{26}$$

3 Dérivation

3.1 Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si la *taux d'accroissement de* f admet une limite quand $x \to x_0$, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe.}$$

On note cette limite $f'(x_0)$ et on l'appelle **dérivée de f en** x_0. Donnons quelques exemples de fonctions dérivables en un point. La fonction $x \mapsto ax + b$, a et b deux constantes réelles, est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a = a. \tag{27}$$

La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0. \tag{28}$$

La fonction sin est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. En effet en utilisant le résultat, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et l'identité trigonométrique

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right), \tag{29}$$

il vient :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \cos x_0. \tag{30}$$

Une remarque importante : si f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0. En effet, on peut écrire (pour $x \neq x_0$) :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{31}$$

Et ainsi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Par contre la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 alors qu'elle est continue en 0.

Si f est dérivalble en tout point d'un intervalle I, on dira que f est dérivable sur I et on considérera la **fonction dérivée** de f, notée f' qui a un point x associe le nombre dérivé $f'(x)$. Par exemple, la fonction dérivée de $x \mapsto x^2$ est la fonction $x \mapsto 2x$.

Si f est dérivable en x_0, la courbe représentative de f admet une tangente au point (x_0, y_0) et cette droite est de pente justement $f'(x_0)$.

3.2 Calculs pratiques

On a le résultat fondamental :

Théorème 3.1 Si f et g sont deux fonctions dérivables en x_0, il en est de même de $f+g$, fg et f/g (si $g(x_0) \neq 0$).

En effet, on a :

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}, \tag{32}$$

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{33}$$

$$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = -\frac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)}. \tag{34}$$

Et ainsi :

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0),\ \ (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0), \tag{35}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2},\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \tag{36}$$

Calculons par exemple les dérivées de $x \mapsto x^2 \sin x + \cos x$, $x \mapsto x^4$ et de tan.

On a un second résultat fondamental :

Théorème 3.2 Si $y = f(x)$ est dérivable en x_0, si $z = g(y)$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

On a en effet :

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\frac{f(x))-f(x_0)}{x-x_0} \tag{37}$$

ou encore

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}. \tag{38}$$

Calculons par exemple les dérivées de $x \mapsto \ln(1+x^2)$ et de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

Une question importante :

> une fonction réciproque d'une fonction dérivable est-elle dérivable (sur de bons intervalles) et si oui quelle est sa dérivée ?

Si on considère $f : x \mapsto x^2$ sur $[0,+\infty[$, la courbe représentative de $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$ est la symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice (on travaille dans un repère orthonormée). La pente de la tangente au graphe de f en $(2;4)$ est 4, tandis que la pente au graphe de f^{-1} en $(4;2)$ est $\frac{1}{4}$. Ce n'est pas surprenant compte tenu de la symétrie des deux graphes par rapport à la première bissectrice. Par contre la pente de la tangente au graphe de f en $(0;0)$ est 0 tandis que f^{-1} n'est pas dérivable en 0. On a en fait le résultat suivant :

Théorème 3.3

Si $f : I \to J$ est bijective et dérivable en x_0 avec de plus $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ avec :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

On écrit :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \tag{39}$$

Calculons les dérivées de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ et de $x \mapsto \arctan x$.

3.3 Notion de primitive

Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$. Soit $x \in [a, b]$, on note **l'aire algébrique « sous » la courbe de f au « dessus » de l'intervalle** $[a, x]$ par :

$$\int_a^x f(t)dt. \tag{40}$$

On montre que la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est continue et dérivable sur $[a, b]$ de dérivée f. On dit que F est une **primitive** de f sur $[a, b]$.

Remarquons que l'aire algébrique « sous » la courbe de f au « dessus » de l'intervalle $[a, b]$ vaut $F(b) - F(a)$, soit :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b. \tag{41}$$

Le théorème de la section suivante assure que si f est continue sur $[a, b]$, toutes les primitives de f sur $[a, b]$ sont égales à une constante près. Ainsi dans l'expression ci-dessus, pour calculer l'aire, on choisit une primitive quelconque. Par exemple :

$$\int_a^b dt = [t]_a^b = b - a, \ \int_a^b tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

On peut définir la fonction ln comme la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, \ x > 0.$$

Fixons $a > 0$ et étudions la fonction $x \mapsto \ln(ax)$.

3.4 Théorème des accroissements finis

On a le théorème fondamental dont l'interprétation géométrique n'est pas difficile :

Théorème 3.4 Si f est une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ $(a < b)$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Examinons le cas de la fonction $x \mapsto x^2$.

Comme conséquences de ce théorème on a, si f et g sont deux fonctions numériques continues sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$ $(a < b)$, dérivables sur l'intervalle ouvert $]a,b[$:

1. Si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$, alors f est une fonction constante.
2. Si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = g'(x)$ alors f et g sont égales à une constante près.
3. Si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0$, f est strictement croissante.
4. S'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in]a,b[,\ |f'(x)| \leq M$, alors

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|,\ \forall (x_1, x_2) \in [a,b] \times [a,b].$$

3.5 La formule de Taylor-Lagrange

Terminons par une formule célèbre, la formule de Taylor-Lagrange (Lagrange 1797). Mais avant de l'énoncer, il faut introduire la notion de **dérivée seconde**, **dérivée troisième** etc. Si f est dérivable (en un point ou sur un intervalle), on peut se pose la question de savoir si f' est dérivable. Si tel est le cas, on dira que f est deux fois dérivable et on notera la dérivée de sa dérivée, la dérivée seconde, f'' ou $f^{(2)}$. On se pose ensuite la question de savoir si $f^{(2)}$ est dérivable...

Par exemple, si $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ et $f^{(3)}(x) = 0$. Calculons les premières dérivées de $x \mapsto \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

Enonçons la célèbre formule :

Théorème 3.5 Si f est est k fois dérivable sur $[a,x]$ (et toutes ces fonctions continues sur [a,x]) et si de plus f est $k+1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,x[$, il existe $c \in]a,x[$ tel que :

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c).$$

Ecrivons la formule de Taylor-Lagrange pour exp entre 0 et x, $k = 4$.

FIGURE 3 – Joseph Louis Lagrange (1736-1813)