Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques [1]

Fonctions numériques (fiche 5)

Dérivées. Primitives

Pour organiser son travail : construire un **tableau de fonctions** : famille de fonctions (comme **polynômes**, **fractions rationnelles**, **fonctions trigonométriques**, **logarithmes**...), domaine de continuité, domaine de dérivabilité, expression de la dérivée, primitive sur un bon intervalle. Quelle est la dérivée de $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$?

Rappeler les propriétés algébriques de la dérivation : puis dérivées de tan, cot (fonction cotangente), $x \mapsto \dfrac{x^3}{x-1}$, dérivée première et dérivée seconde de $\dfrac{x}{1+x^2}$, dérivées successives de x^2e^x, dérivée du produit de trois fonctions dérivables $u(x)v(x)w(x)$, aire sous la courbe $y = x^4$ au dessus de l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$.

Dérivée d'une fonction composée : énoncer le résultat avec les bonnes hypothèses ; dérivées de $x \mapsto \cos(3x)$, $x \mapsto \cos(\sin(x))$, $x \mapsto e^{3x+1}$, $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \mapsto \ln(x^4 + x^2 + 1)$, $x \mapsto \sqrt{x^6 + 4}$. Retrouver la dérivée de $\arctan x$ en dérivant l'égalité $\arctan(\tan x) = x$ ($y = \tan x$, $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$). Dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \dfrac{1}{4}\ln(2x + \sqrt{4x^2+1})$.

Dérivée d'une réciproque : énoncer le résultat avec les bonnes hypothèse ; dérivées de arcsin et arccos sur des intervalles que l'on précisera ; dérivée de $x \mapsto \dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin x$ (à priori sur quel intervalle ?), en déduire l'aire du disque unité.

Primitives : de $x \mapsto \dfrac{4x}{1+x^2}$, $x \mapsto xe^{-x^2}$, $x \mapsto x^6$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto e^{5x+2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{4+x^2}$.

Théorème des accroissements finis : rappeler ce résultat avec les bonnes hypothèses. Montrer que $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$. Expliquer pourquoi, si une fonction dérivable admet un extremum local en un point intérieur à un intervalle, la dérivée est nulle en ce point (on parlera de **point critique**). Notons qu'en général en montre le théorème de Rolle avant celui des accroissements finis.

Pourquoi peut-on relier le signe de la dérivée à ses variations ? Etudier les variations de $x \mapsto \dfrac{x^3}{x-1}$.

Cas de deux fonctions ayant sur un intervalle la même dérivée : montrer que si $x > 0$, alors $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ (et si on remplaçait $x > 0$ par $x < 0$?). Examiner les deux fonctions $\arctan x$ et $\arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $(x > 1)$.

1. Licence Sciences L1, MaIE1A

Formule de Taylor-Lagrange : Ecriture de la **formule de Taylor-Lagrange** à différents ordres pour $f(x) = \cos x$ et $g(x) = x^6 + 4x^5 + 6x^4 + x^3 + 2x^2 + 1$ sur des intervalles précisés.

Si f est une fonction suffisamment régulière au voisinage ouvert de x_0, on retiendra que : si $f'(x_0) = 0$ et si $f''(x_0) > 0$ alors f possède un minimum local en x_0 ; si $f'(x_0) = 0$ et si $f''(x_0) < 0$ alors f possède un maximum local en x_0. On applique cela à l'étude des extrema de $y = x^3 - x^2 - 3x$, puis de $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Méthode de Newton : on étudie la fonction polynômiale $P(x) = x^3 - 2x - 5$. On montre que l'**équation algébrique** $x^3 - 2x - 5 = 0$ admet une solution et une seule $x^\star$. On peut d'ailleurs la **localiser** entre 2 et 3. Il s'agit à présent d'en trouver des **valeurs approchées**.

On utilise pour cela la **méthode des tangentes de Newton (1643-1727)**. On remplace la fonction $P(x)$ par sa tangente au point $x_0 = 2$ pris comme condition initiale :

$$y = P'(x_0)(x - x_0) + P(x_0).$$

On cherche l'abscisse x_1 du point d'intersection de cette tangent avec l'axe $y = 0$:

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)}.$$

On recommence le même processus à partir du point x_1.

Exercices supplémentaires

exercice 1 On pose pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = x + \sqrt{\sin x} \tag{1}$$

Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0, 1 + \frac{\pi}{2}\right]$, puis que f^{-1} est continue et dérivable sur $\left]0, 1 + \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer $(f^{-1})'(1 + \frac{\pi}{2})$.

exercice 2 Donner l'expression de la dérivée $n$ième de $x \mapsto x^2(1 + x)^n$. On pourra utiliser, après l'avoir rappelée, la **formule de Leibniz**.

exercice 3 Pour le **paramètre** $\lambda \in I\!R$, on considère les fonctions :

$$f_\lambda(x) = \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}. \tag{2}$$

On pourra tracer de telles courbes.

1. Chacune des courbes représentatives des f_λ passe par le point $(0, \lambda)$. Montrer que les tangentes aux points $(0, \lambda)$, λ parcourant $I\!R$, sont parallèles.
2. Observer que les tangentes en 1 sont concourantes.

exercice 4 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[1, 2]$, dérivable sur $[1, 2[$ et s'annulant en 1 et 2.

Montrer que l'on peut mener par l'origine une **tangente** au graphe G de f. On commencera par faire un dessin.