Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques [1]

Fonctions numériques (fiche 3)

Composées

exercice 1 ♣

1. Si $f(x) = x - 2$ et $g(x) = x^2$, définir $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Si $f(x) = 3x + 4$ et $g(x) = 5$, définir $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. Si $f(x) = 3x^2 - x + 10$ et $g(x) = 1 - 20x$, définir $f \circ g$, $g \circ f$ et $g \circ g$.
4. Ecrire comme composée de deux fonctions, $x \mapsto (x^2+2)^6$. Même travail pour $x \mapsto \frac{4}{x}+3$.

exercice 2 ♣

1. On pose $id(x) = x$. Calculer, f étant une fonction numérique, $id \circ f$ et $f \circ id$.
2. Si $f(x) = 3x - 2$, déterminer $f^{-1}(x)$.
3. Si $g(x) = \sqrt{x-3}$, déterminer $g^{-1}(x)$ (on précisera sur quels intervalles on se place).
4. Même travail que dans la question précédente pour $h(x) = \dfrac{x+4}{2x-5}$.

Interpolation

exercice 3 ♣

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de son repère canonique.

1. Donner l'équation de la droite passant par les points $(-1; 3)$ et $(1; 5)$.
   (a) Quelle est l'ordonnée du point d'abscisse 0 se trouvant sur cette droite ?
   (b) Quelle est l'abscisse du point d'ordonnée 9 se trouvant sur cette droite ?
2. Soit D la droite d'équation $y = 3x - 1$.
   (a) Quelle est l'équation de la (droite) symétrique de D par rapport à la première bissectrice $(y = x)$?
   (b) Quelle est l'équation de la droite orthogonale à D passant par l'origine ?
   (c) Quelle est l'équation de la parallèle à D passant par l'origine ?

Continuité

1. Licence Sciences L1, MaIE1A

exercice 4 ♣

Expliquer pourquoi les fonctions suivantes sont continues (on rappelle que $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et que ln est continue sur $]0, +\infty[$) :

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1} \text{ sur } I\!R. \tag{1}$$

$$x \mapsto \sqrt{2 - x} \text{ sur ?} \tag{2}$$

$$x \mapsto \ln(x^2 + x + 1) \text{ sur ?} \tag{3}$$

exercice 5 ♣

La fonction f est définie par : $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Cette fonction est-elle continue en 0 ? On pourra considérer des points de la forme $\dfrac{1}{2k\pi}$ ou $\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, k entier non nul.

exercice 6 ♣

1. Montrer que si $0 \leq x < y$ alors $x^2 < y^2$. On formera la différence $y^2 - x^2$.
2. Déduire de la question précédente que la fonction $f : x \mapsto x^2 + x + 1$ est strictement croissante sur $[0, 1]$.
3. En utilisant des résultats du cours (que l'on énoncera), expliquer pourquoi f réalise une bijection bicontinue de $[0, 1]$. sur $[1, 3]$. Tracer alors le graphe de f^{-1} sur $[1, 3]$.

exercice 7 ♣

1. Montrer que si $0 \leq x < y$ alors $x^3 < y^3$ (en fait on a que si $x < y$ alors $x^3 < y^3$).
2. En déduire que la fonction $f : x \mapsto x^3 + 2$ réalise une bijection bicontinue de $[0, 1]$ sur $[2, 3]$. Tracer alors le graphe de f^{-1} sur $[2, 3]$.