Arithmétique

Récurrence

exercice 1 ♣
Montrer de plusieurs façons que pour tout $n \in I\!N$, $2^n > n$.

exercice 2 ♣
Soit q un réel non nul. On considère la suite définie par la relation $u_{n+1} = qu_n$, $n \in I\!N$ et la condition initiale $u_0 = 2$. Trouver de différentes manières l'expression du terme u_n.

exercice 3 ♣♣
Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111 quel que soit $n \in I\!N$. (Indication : $1000 = 9 \times 111 + 1$). Pourriez-vous montrer ce résultat d'une autre façon ?

exercice 4 ♣
Montrer que :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in I\!N^*$. (relation bien connue...)
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in I\!N^*$.

exercice 5 ♣
Trouver l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ (exemple traité en cours).

exercice 6 ♣
Quelle doit être la somme des nombres d'une ligne (ou d'une colonne) d'un carré magique normal ?

Division euclidienne, congruences.

exercice 7 ♣
On a $96842 = 256 \times 375 + 842$ qui n'est pas une division euclidienne. Quels sont les restes dans la division euclidienne de 96842 par 256, respectivement 375 ?

1. Licence Sciences L1, MaIE1A

exercice 8 ♣
Montrer qu'en faisant des divisions euclidiennes successives, on obtient :

$$\frac{105}{24} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}}.$$

On dit que l'on a mis la fraction de départ sous la forme d'une **fraction continue**. Si on calcule le membre de droite, on obtient le **représentant irréductible** de la fraction de départ.

exercice 9 ♣
Pour deux entiers a et b, dire que leur différence est divisible par 8 équivaut à dire que les restes dans les divisions euclidiennes de a et b par 8 sont les mêmes. Montrer cette affirmation.

On rappelle que l'on dit alors que a **et** b **sont congrus modulo** 8 et on note cela :

$$a \equiv b \pmod 8.$$

Etablir que l'on peut partionner l'ensemble $\mathbb{Z}$ en 8 sous-ensembles disjoints correspondant aux 8 restes possibles dans la division par 8.

exercice 10 ♣
Rappeler les opérations sur les congruences $\pmod n$.

exercice 11 ♣
Etablir les congruences :

1. $15^{31} \equiv 0 \pmod 3$, $16^{31} \equiv 1 \pmod 3$, $17^{31} \equiv 2 \pmod 3$
2. $28^{89} \equiv 3 \pmod 5$
3. $100^{1000} \equiv 9 \pmod{13}$

Algorithme d'Euclide, identité de Bezout.

exercice 12 ♣
Calculer le $\gcd(17, 11)$ et établir une identité de Bezout entre 17 et 11.

Résoudre l'équation (diophantienne) $17x - 11y = 1$. Interpréter cela géométriquement (tracer la droite d'équation $17x - 11y = 1$).

exercice 13 ♣
Calculer le $\gcd(105, 24)$ et établir une identité de Bezout entre 105 et 24.

exercice 14 ♣

1. Résoudre les équations $105x + 24y = 3$, $105x + 24y = 12$, $105x + 24y = 28$.
2. Résoudre l'équation $1665x + 1035y = 45$ après l'avoir simplifiée en utilisant $\gcd(1665, 1035, 45)$.