Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques[1]

Trigonométrie et nombres complexes (fiche 3)

Calculs avec les nombres complexes

exercice 1 ♣
Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b\in I\!R)$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

exercice 2 ♣

1. Écrire sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants :
   (a) Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
   (b) Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.
2. Placer dans le plan complexe, les points d'affixes suivantes :

$$z_1=i, \quad z_2=1+i, \quad z_3=-2+2i, \quad z_4=e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

exercice 3 ♣
Écrire les nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$ $(a,b\in I\!R)$:

$$\frac{5+2i}{1-2i} \quad ; \quad \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad ; \quad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

Transformation d'expressions

exercice 4 ♣
Linéariser $\cos^4(x)$ et $\sin^4(x)$.

exercice 5 ♣
Transformer l'expression $\sin(4\theta)$.

exercice 6 ♣♣
Pour $0<x<\frac{\pi}{2}$, calculer $\sum_{k=0}^{n-1}\cos(kx)$.

Indication 1 Remarquer que

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(kx)=Re(\sum_{k=0}^{n-1}e^{ikx}).$$

et utiliser une formule importante...

1. Licence Sciences L1, MaIE1A

Equations

exercice 7 ♣
Quelles sont les racines carrées de $3+4i$?

exercice 8 ♣
En calculant de deux façons différentes les racines carrées de $1+i$, trouver les expressions de $\cos\frac{\pi}{8}$ et de $\sin\frac{\pi}{8}$.

exercice 9 ♣
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \tag{1}$$
$$z^2-(1+2i)z+i-1=0 \tag{2}$$
$$z^2-\sqrt{3}z-i=0 \tag{3}$$
$$z^4+10z^2+169=0 \tag{4}$$
$$z^4+2z^2+4=0 \tag{5}$$

exercice 10 ♣
Résoudre l'équation $z^3 = 27$ en se ramenant aux racines de l'unité. Même question avec l'équation $z^4=16$

exercice 11 ♣

1. Donner les expressions trigonométriques des 6 racines 6ième de l'unité.
2. Vérifier que $(1-i)^6=8i$. Quelles sont les racines 6ième de $8i$?

Lieux géométriques

exercice 12 ♣
Rappelons que $|\alpha-\beta|$ est la distance euclidienne entre les points d'affixes α et β du plan complexe.

1. Quel est le lieu des complexes (ou des points d'affixes ces complexes) z tels que $|1+iz|=|1-iz|$?

   Indication 2 Trois méthodes proposées :
   (a) calcul des deux modules (au carré) partant de $z=x+iy$;
   (b) utilisation de $|z|^2=z\overline{z}$;
   (c) **interprétation géométrique**.
2. Quelle est l'intersection des cercles : $|z|=1=|z-1|$?
3. Quel est l'ensemble des complexes z vérifiant $|z-1|=|z|$?
4. Quel est l'ensemble des complexes z vérifiant $|z-1|=2|z|$?