Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques [1]

**Trigonométrie et nombres complexes (fiche 2)**

## Trigonométrie

**exercice 1** ♣

1. Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, exprimer $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ à l'aide de $\cos x$ et $\sin x$.
2. On rappelle que $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, trouver les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

**exercice 2** ♣

Si $x \in \left]-\pi, \pi\right[$, exprimer $\cos x$ et $\sin x$ à l'aide de $\tan\frac{x}{2}$. En déduire une nouvelle paramétrisation du cercle trigonométrique (moins un point que l'on précisera).

**exercice 3** ♣

Transformer le produit $\sin(p)\sin(q)$ en une somme de sinus et cosinus.

**exercice 4** ♣

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$.
2. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $\sin x = \cos x$.
4. $\sin 2x = \sin 3x$.

**exercice 5** ♣♣

1. Etablir que $\sin(5x) = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$.

   **Indication 1** : on pourra partir de $\sin(5x) = \sin(2x + 3x)$ et utiliser (ou prouver) que :

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x, \quad \sin(3x) = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x.$$

2. En utilisant l'indentité de la question précédente, déterminer la valeur de $\sin\frac{\pi}{5}$.

   **Indication 2** On pourra montrer que $\sin\frac{\pi}{5}$ est solution d'une équation algébrique de degré 5, puis d'une degré 4. On peut ramener cette dernière équation à la résolution d'une équation du second degré. Encadrer au préalable $\sin\frac{\pi}{5}$.

1. Licence Sciences L1, MaIE1A

**exercice 6** ♣
Donner les expressions de $\sin(\arcsin x)$ $(-1 \leq x \leq 1)$ et de $\arcsin(\sin x)$ ($x$ réel quelconque).

**exercice 7** ♣

1. Pour $-1 \leq x \leq 1$, calculer $\arccos x + \arcsin x$.
2. Si $x > 0$, que vaut $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ ?

**exercice 8** ♣♣
Pour $x \in \mathbb{R}$, donner l'expression de $\cos(\arctan x)$.

**Indication 3** Partir de $\tan y = x$ (en précisant où se trouve $y$) et écrire que $x \cos y = \sin y$, puis élever au carré...

**exercice 9** ♣♣

1. Montrer, pour $x$ et $y$ supposés convenables, que :
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$
2. En déduire que :
$$\arctan u + \arctan v = \arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right)$$
si $|\arctan u + \arctan v| < \frac{\pi}{2}$.
3. Etablir la formule intéressante suivante :
$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}.$$