Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques [1]

Calculs algébriques (fiche 1)

Equations

exercice 1 ♣

1. Résoudre (dans $\mathbb{R}$) l'équations $x^2 - 3x + 2 = 0$. On proposera différentes méthodes.
2. Toujours dans $\mathbb{R}$, quelles sont les solutions de l'équation $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$. Même question pour l'équation $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ sachant que 3 est solution (

   Indication 1 : essayer de mettre $x - 3$ en facteur dans le *polynôme*).

exercice 2 ♣
Résoudre les systèmes suivants (une solution éventuelle est un couple de réels) :

$$\left\{\begin{array}{rcr} u+v &=& 3 \\ u-v &=& -1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{rcl} u+v &=& 3 \\ uv &=& 2 \end{array}\right.$$

exercice 3 ♣
Résoudre les systèmes suivants (une solution éventuelle est un triplet de réels) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z &=& 1 \\ x-y+z &=& 2 \\ xyz &=& 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z &=& 1 \\ x-y+2z &=& 2 \\ 3x-y+z &=& 3 \end{array}\right.$$

Sommation

exercice 4 ♣
Si les a_i, les b_i, α et β sont des nombres complexes, on a (compléter) :

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i) = \ldots$$

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{30}(4k-3)$.

Indication 2 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

exercice 5 ♣
Les a_i étant des nombres complexes, établir que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-j}.$$

Quel nom pourrait-on donner au procédé qui nous fait passer du terme de gauche à celui de droite ?

1. Licence Sciences L1, MaIE1A

exercice 6 ♣ (Double indices)
Les a_{ij} sont des nombres complexes pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$. Combien y-a-t-il de nombres a_{ij} ?

Soit S la somme de tous ces nombres. Expliquer pourquoi :

$$S = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij} \right)$$

Indication 3 : placer les a_{ij} dans un tableau.

exercice 7 ♣
Calculer :

$$a := 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} \ ;$$

$$\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^7} + \frac{1}{10^8} + \frac{1}{10^9} \ ;$$

$$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}.$$

Donner une majoration de $\log_{10}(a)$.

Indication 4 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ si $a \in \mathbb{C}$ et $a \neq 1$.

exercice 8 ♣
Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{2k+1}.$$

exercice 9 ♣ (Télescopage)
Les x_i étant des nombres complexes, exprimer simplement la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)$. On proposera différents raisonnements.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$.

Indication 5 : trouver a et b tels que $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.