Trigonométrie. Nombres complexes. (notes de cours)

H. Le Ferrand

25 septembre 2017

FIGURE 1 – Ptolémée, 90-168

Table des matières

1 Introduction

Après quelques rappels de trigonométrie, nous aborderons les calculs avec les nombres complexes. Il est attendu de votre part, à la fin de cours et des travaux dirigés l'accompagnant, un bonne maîtrise des formules de trigonométrie et du calcul avec les nombres complexes (y compris la résolution d'équations du second degré à une variable complexe).

Donnons quelques éléments historiques sur la trigonométrie. On peut considérer la trigonométrie comme un ensemble de méthodes permettant le calcul des propriétés d'un triangles, i.e. longueurs des côtés et angles. Elle semble avoir son origine en Astronomie : Aristarque de Samos (IIIe siècle avant JC) ; il est souvent plus aisé de déterminer un angle que des grandes distances. Nous parlons ici de **trigonométrie plane**. Or, les calculs astronomique se font plutôt dans un contexte de sphère. Citons le grec Ménélaos (vers 100 après JC) qui développe les premiers travaux en trigonométrie sphérique dans son ouvrage *Les sphériques* (livre I) [1].

Dans l'*Almageste*, Ptolémée (vers 150 après JC) propose différentes méthodes pour calculer des **cordes**. Il donne ses résultats sous forme de tables.Il semble que la notion de corde ait été introduite par Hipparque (vers 200 avant JC).

On trouve la notion du sin [2] pour la première fois dans les travaux du mathématicien indien Aryabhata l'Ancien au VIe siècle après JC. Le mathématicien allemand Johannes Müller (1436-1476), connu sous le non de Regiomontanus, développe au Moyen-Age le calcul trigonométrique. Il écrivit notamment *De triangulis planis et sphaerius*. Regiomontanus eut Georg Peurbach (1423-1461) comme professeur à l'Université de Vienne. Ce dernier s'était lancé dans un projet de révision et d'amélioration de l'Almageste. Regiomontanus poursuivra le travail de son professeur.

Si le rayon du cercle vaut R, on a la relation :

$$\frac{1}{2}\,\text{corde}\,\alpha = R\sin(\frac{\alpha}{2}). \tag{1}$$

2 Trigonométrie

2.1 Définitions des fonctions trigonométriques

On définit les **fonctions circulaires** sin, cos, tan à l'aide du **cercle trigonométrique** (cercle de rayon 1 orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre). Pour tan, on utilise le **théorème de Thalès**. On parle du sinus d'un réel x qui correspond à un angle exprimé en **radians**. Dans le cas d'un triangle rectangle quelconque, on peut exprimer les longueurs des côtés (opposé et adjacent) à l'aide de la longueur de l'hypothénuse et des fonctions cos et sin.

---

1. La notion fondamentale en géométrie sphérique est celle de *géodésique*, soit une courbe sur une surface réalisant le plus court chemin entre deux points. Sur la sphére euclidienne de $\mathbb{R}^3$, ce sont les arcs de *grands cercles*. De plus, dans un triangle sphérique, la somme des angles n'est pa égale à π.
2. Le terme *sinus rectus* (pli) apparaît au Moyen-Age.

2.2 Premières formules. Périodicité.

On a déjà que $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$ puis :

$$\sin(-x) = -\sin(x),\ \cos(-x) = \cos(x) \tag{2}$$

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x),\ \cos(x+\pi) = -\cos(x) \tag{3}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x),\ \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \tag{4}$$

On n'oubliera pas la relation fondamentale :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1. \tag{5}$$

Les fonctions sin et cos sont *périodiques* de période 2π. Quant à la fonction tan, elle est périodique de période π.

On retiendra aussi que pour tout $(x, y) \in I\!R \times I\!R = I\!R^2$:

$$\cos x = \cos y \iff y = x + 2k\pi \text{ ou } y = -x + 2k\pi,\ k \in Z\!\!Z \tag{6}$$

$$\sin x = \sin y \iff y = x + 2k\pi \text{ ou } y = \pi - x + 2k\pi,\ k \in Z\!\!Z \tag{7}$$

2.3 Sinus et cosinus d'une somme

On a le résultat fondamental (Ptolémée 150 ap. JC, Regiomontanus 1464) :

Théorème 2.1

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \tag{8}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{9}$$

On en déduit les expression de $\cos 2x$, $\sin 2x$:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1. \tag{10}$$

Puis, ce qui est le plus intéressant, en introduisant l'**angle moitié**, on exprime $\cos x$, $\sin x$ en fonction de $\tan \dfrac{x}{2}$ (**attention** : $x \in]-\pi, \pi[$) :

$$\cos x = \cos\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \tag{11}$$

$$= \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{12}$$

$$= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{13}$$

Ceci conduit à une nouvelle **paramétrisation** du cercle trigonométrique (privé d'un point) :

$$u \mapsto \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)$$

u parcourant $I\!R$.

FIGURE 2 – Regiomontanus, 1436-1476

2.4 Formules $\sin u + \sin v$

En utilisant (8) et (9), et changeant y en $-y$, on obtient :

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y. \tag{14}$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \tag{15}$$

Ainsi, par exemple, on a :

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y. \tag{16}$$

Posons :

$$x + y = u, \;\; x - y = v$$

soit

$$x = \frac{u+v}{2}, \;\; y = \frac{u-v}{2}.$$

Ainsi :

$$\sin u + \sin v = 2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(y = \frac{u-v}{2}\right). \tag{17}$$

2.5 Valeurs particulières

On peut retrouver la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$ en faisant par exemple :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cdots$$

On peut aussi utiliser la formule du cosinus de l'angle moitié.

α (degrés)	radians	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0	0	0	1	0
15	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$2-\sqrt{3}$
18	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{(3\sqrt{5}-5)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{10\sqrt{2}}$
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
36	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
75	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$2+\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞

2.6 Fonctions trigonométriques inverses

La question fondamentale est : connaissant la valeur du sinus de l'arc, peut-on obtenir la mesure de l'arc ? On peut répondre par l'affirmative en prenant certaines précautions. Ainsi la fonction sin réalise une *bijection* de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. On a des résultats analogues pour les fonctions cos et tan que l'on résume par :

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y,\ -1 \leq x \leq 1,\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \tag{18}$$

$$y = \arccos x \iff x = \cos y,\ -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \pi \tag{19}$$

$$y = \arctan x \iff x = \tan y, x \in I\!R,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \tag{20}$$

Npus reviendrons dans un autre chapitre du cours (*Continuité et Dérivation*) sur cette notion de bijection.

On fera attention au point suivant : si $\sin(\arcsin x) = x$ pour tout x nécessairement dans $[-1, 1]$, on n'a pas $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout x réel.

Considérons un point M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé direct (O, I, J) du plan euclidien $I\!R^2$. Supposons $x > 0$, ainsi l'angle orienté θ que fait OM avec OI est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Dans ce cas, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ et on peut écrire $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$. Qu'en est-il si M n'est plus dans le demi-plan droit ouvert ?

Supposons que M ne se situe pas sur la demi-droite $\{(x, y)\ /\ x \leq 0,\ y = 0\}$ (ce qui signifie que $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$), alors :

$$\theta = 2\arctan\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

On prouve ce résultat en utilisant la tangente de l'**angle moitié**.

2.7 Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Supposons que $(a, b) \neq (0, 0)$, c'est à dire que a et b sont deux réels non tous nuls, alors :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right). \tag{21}$$

Soit θ un réel (ou un angle exprimé en radians) tel que :

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ceci a un sens car le point $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ est sur le cercle trigonométrique. On a ainsi :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta). \tag{22}$$

A titre d'exemple résolvons l'équation $\cos x + \sin x = 1$.

3 Calculs sur l'ensemble des nombres complexes

3.1 Plusieurs ensembles de nombres

On connaît les ensembles suivants (on écrit les **inclusions**) :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Il existe des constructions rigoureuses de ces ensembles. L'ensemble $\mathbb{N}$ a été par exemple axiomatisé à la fin du XIXe siècle par le mathématicien italien Peano. On peut souligner que $\mathbb{Q}$ se construit à partir de $\mathbb{Z}$ par la même méthode qui a permis de construire $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$ (**symétrisation** d'une opération). Par contre la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ est beaucoup plus difficile : on sort du domaine de l'**Algèbre** pour entrer dans celui de l'**Analyse**. De plus si l'on sait depuis l'Antiquité grecque que $\sqrt{2}$, solution positive de $x^2 = 2$ est **irrationnel**, il a fallu attendre la fin du XIXe siècle pour savoir que π est **transcendant** [3].

En 1545 dans son ouvrage *Ars Magna*, Cardan s'intéresse à l'équation suivante (que l'on écrit ici de façon moderne) :

$$x^2 - 10x + 40 = 0. \tag{23}$$

Cette équation conduit Cardan à considérer $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$:

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40.$$

C'est finalement au XVIIIe siècle que le symbole i est introduit par Leonhard Euler (1707-1783) : $i = \sqrt{-1}$. Ainsi les deux solutions de l'équation ci-dessus sont $5 + i\sqrt{15}$ et $5 - i\sqrt{15}$.

On considère donc à présent l'ensemble des nombres de la forme $c = a + ib$, a et b étant des réels. On note $a = Re(c)$, **partie réelle** de c et $b = Im(c)$, **partie imaginaire** de c. Cet ensemble de nombre est noté $\mathbb{C}$. On parlera aussi du plan complexe $\mathbb{C}$: on munit en fait $\mathbb{R}^2$ d'un repère orthonormé directe et on associe au nombre $c = a + ib$ le point M de coordonnées (a, b) dans le repère. On dit que c est l'**affixe** du point M.

3. π n'est pas solution d'une équation algébrique à coefficients entiers.

FIGURE 3 – Cardano, 1501-1576

Toujours au XVIIIe siècle, les mathématiciens Gauss et d'Alembert montrent que toute équation algébrique à coefficients complexes admet une solution dans $\mathbb{C}$.

3.2 Calculs dans $\mathbb{C}$

On mène les calculs avec les nombres complexes de la même façon l'on calcule avec des rationnels ou des réels, en n'oubliant pas que $i^2 = -1$.

Ainsi si $c = a + ib$ et $w = u + iv$, on a :

$$c + w = (a + u) + i(b + v), \; c - w = (a - u) + i(b - v) \tag{24}$$

Le produit cw est donné par :

$$cw = (au - bv) + i(av + bu). \tag{25}$$

Le calcul du quotient $\frac{w}{c}$ est plus délicat (on suppose $c \neq 0$, c'est-à-dire $(u, v) \neq (0, 0)$. Introduisons le **conjugué** de c :

$$\bar{c} = a - ib. \tag{26}$$

Géométriquement le point d'affixe $\bar{c}$ est le symétrique (orthogonal) par rapport à la droite des abscisses du point d'affixe c. La distance euclidienne de l'origine au point d'affixe c vaut par définition $\sqrt{a^2 + b^2}$ que l'on note aussi $|c|$ et que l'on appelle **module** de c :

$$a^2 + b^2 = c\bar{c} = |c|^2. \tag{27}$$

FIGURE 4 – Jean Le Rond d'Alembert, 1717 (Paris)-1783 (Paris)

Calculons $\frac{w}{c}$:

$$\frac{w}{c} = \frac{w\bar{c}}{c\bar{c}} = \frac{au+bv}{a^2+b^2} + i\frac{av-bu}{a^2+b^2}. \tag{28}$$

3.3 Quelques propriétés

On retiendra que le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, que le conjugué d'un produit est le produit des conjugué et qu'un nombre est complexe si et seulement si il est égal à son conjugué.

On a aussi :

$$Re(c) = \frac{c+\bar{c}}{2},\ Im(c) = \frac{c-\bar{c}}{2i}. \tag{29}$$

Concernant le module, il est bon de savoir qu'un nombre complexe est nul si et seulement si son module l'est, que le module d'un produit est égal au produit des modules et que le module de la somme de deux complexes est inférieur ou égal à la somme des modules. Montrons ces deux derniers points.

Si $c = a + ib$ et $w = u + iv$, alors $cw = (au - bv) + i(av + bu)$, d'où :

$$\begin{aligned} |cw|^2 &= (au-bv)^2 + (av+bu)^2 && (30)\\ &= a^2u^2 - 2aubv + b^2v^2 + a^2v^2 + 2avbu + b^2u^2 && (31)\\ &= a^2u^2 + b^2v^2 + a^2v^2 + b^2u^2 && (32) \end{aligned}$$

FIGURE 5 – Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 (Brunswick)- 1855 (Göttingen)

$$= \quad (a^2+b^2)(u^2+v^2). \tag{33}$$

On pouvait aussi écrire que $|cw|^2 = cw\overline{cw}$...

On a $|c+w|^2 = (c+w)(\overline{c}+\overline{w}) = |c|^2+|w|^2+2Re(c\overline{w})$. Or :

$$Re(c\overline{w}) \leq |c\overline{w}| = |c||w|$$

d'où

$$|c+w|^2 \leq |c|^2+|w|^2+2|c||w| = (|c|+|w|)^2.$$

et donc

$$|c+w| \leq |c|+|w|. \tag{34}$$

3.4 Forme trigonométrique (ou polaire)

Soit $c = a+ib$ est un nombre complexe non nul, on lui associe le point M d'affixe c dans le plan complexe et on note φ l'angle (orienté) entre l'axe des réels et le vecteur $\vec{OM}$. On a ainsi :

$$c = |c|(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{35}$$

Une mesure de φ est appelé **argument** de c : elle est donnée **modulo** 2π et est notée $\arg c$. Le module de c est souvent noté r.

Remarquons que si $a > 0$, c'est-à-dire que M se trouve dans le demi-plan droit ouvert, $\arg c = \arctan\dfrac{b}{a}$.

Donnons quelques exemples (rappelons que les arguments sont donnés modulo 2π) : $\arg 1 = 0$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$.

On n'oubliera pas que **deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument modulo** 2π.

3.5 La formule d'Euler

FIGURE 6 – Leonhard Euler, 1707 (Bâle)-1783 (St Petersbourg)

Euleur établit en 1743, le résultat suivant :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{36}$$

que nous pourrions prendre comme une définition !

En classe de Terminale a été introduite la fonction exp. Cette fonction peut être *prolongée* à l'ensemble $\mathbb{C}$ tout en conservant la propriété fondamentale que l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles. De plus, Euler relie cette application prolongée aux fonctions sin et cos.

On écrira ainsi le nombre complexe $c = a + ib$ d'argument φ :

$$c = re^{i\varphi},\ r = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{37}$$

Remarquons que $\bar{c} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = re^{-i\varphi}$.

Soit un autre complexe $w = se^{i\theta}$, calculons cw. Tout d'abord :

$$\begin{aligned} e^{i\varphi}e^{i\theta} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\theta + i\sin\theta) &(38)\\ &= (\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) + i(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta) &(39)\\ &= e^{i(\varphi+\theta)}. &(40) \end{aligned}$$

On a ainsi :

$$cw = rse^{i(\varphi+\theta)}. \tag{41}$$

On montre de même :

$$\frac{w}{c} = \frac{s}{r}e^{i(\theta-\varphi)}. \tag{42}$$

On retiendra aussi la formule d'Abraham de Moivre (1667, Vitry-le-François – 1754, Londres) :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{ix})^n = e^{inx}. \tag{43}$$

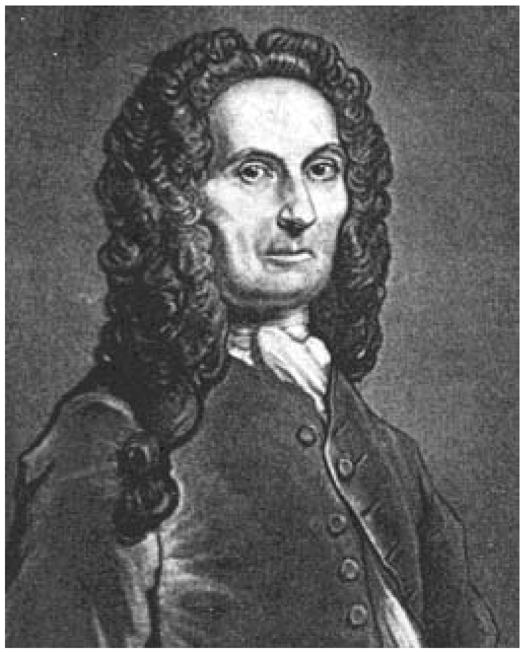

FIGURE 7 – Abraham de Moivre, 1667-1754

La formule de de Moivre permet d'écrire $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme des combinaisons linéaires de puissances de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$. On a par exemple :

$$\begin{aligned}(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 && (44)\\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(-\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta). && (45)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \tag{46}$$

On peut utiliser cette formule pour exprimer sous forme cartésienne des quantités de la forme $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{14}$ (réponse : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2i\frac{\pi}{3}}$).

On prolonge la fonction exponentielle à tout le plan complexe de la façon suivante :

$$c = a + ib,\ e^c = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b). \tag{47}$$

3.6 Linéarisation

Nous donnons tout d'abord deux formules qu'il faut absolument connaître :

— Formule du **binôme de Newton** (triangle de Pascal (17e siècle)) :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) u^k v^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) u^{n-k} v^k, \ (u,v) \in \mathbb{C}^2. \tag{48}$$

— Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, alors :

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}. \tag{49}$$

On se propose d'écrire $\cos^3 x$ à l'aide de cosinus et sinus sans exposant : on dit que l'on **linéarise** $\cos^3 x$. On part de l'expression

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{50}$$

puis on applique la formule du binôme de Newton et on simplifie. On obtient :

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

3.7 Equations du second degré. Racines de l'unité.

3.7.1 Racines carrées

Soit Z un nombre complexe non nul, il existe deux nombres complexes distincts z tels que $z^2 = Z$. En effet si $Z = Re^{i\theta}$ ($R > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), $z = re^{i\varphi}$ ($r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$), $z^2 = Z$ si et seulement si $r^2 = R$ et $2\varphi = \theta$ modulo 2π. Le nombre complexe Z a donc deux *racines carrées* :

$$z_1 = \sqrt{R}e^{i\frac{\theta}{2}}, \ z_2 = -z_1. \tag{51}$$

Les racines carrées de -1 sont i et $-i$. Celles de $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ sont $\pm\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$...

On peut aussi raisonner à partir de la forme cartésienne de Z. Si $Z = \alpha + i\beta$, alors $z = a + ib$ est racine carrée de Z si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & \alpha \\ 2ab & = & \beta \end{array} \right.$$

On peut ajouter la condition sur les modules : $a^2 + b^2 = |z|^2 = |Z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. On a donc les système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & \alpha \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ 2ab & = & \beta \end{array} \right. \tag{52}$$

Par cette méthode on trouve que les racines carrées de $-7 + 24i$ sont $3 + 4i$ et $-3 - 4i$.

3.7.2 Equations du second degré

On s'intéresse à l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont trois complexes avec $a \neq 0$. Factorisons (**factorisation canonique**) le polyôme $az^2 + bz + c$: on met tout d'abord a en facteur

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right). \tag{53}$$

On remarque que $z^2 + \frac{b}{a}z$ est « le début d'un carré » :

$$z^2 + \frac{b}{a}z = z^2 + 2\frac{b}{2a}z = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}. \tag{54}$$

Ainsi on obtient :

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \tag{55}$$

On conclut facilement (« différence deux carrés ») si l'on connaît une racine carrée de $b^2 - 4ac$. Résolvons à titre d'exemple :

$$z^2 - (1 - 2i)z + 1 - 7i = 0.$$

3.7.3 Racines $n$ième de l'unité

Construire un polygone (convexe) régulier à l'aide d'une règle (non graduée) et d'un compas a été historiquement un problème de Géométrie important. Si l'existence d'un polygone (convexe) régulier à n côtés ne pose pas de difficulté comme nous allons le voir, tout polygone polygone (convexe) régulier à n n'est pas nécessairement constructible à la règle et au compas et si il l'est, la construction est délicate !

Les **racines n-ième de l'unité** sont les n complexes z_k, $k = 0, \ldots, n-1$ solutions de l'équation $z^n = 1$:

$$z_k = e^{2i\frac{k\pi}{n}}. \tag{56}$$

Si l'on joint les n points d'affixes les z_k, on obtient un polygone à n côtés. Par exemple, les trois racines cubiques de l'unité sont 1, $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $\overline{j} = j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.